Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2013
Семинар 6: машины Тьюринга

Машиной Тьюринга называется кортеж $\langle \Sigma, \Gamma, Q, q_1, q_0, \delta \rangle$, где Σ, Γ и Q суть конечные непустые множества, причём $\Sigma \subset \Gamma$ и $\Gamma \cap Q = \varnothing$, $q_0, q_1 \in Q$, $q_0 \neq q_1$, а $\delta\colon (Q \setminus \{q_0\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$. Σ называется входным алфавитом, Γ — ленточным алфавитом, Q — множеством состояний, а q_1 и q_0 — начальным и завершающим состояниями соответственно. Функцию перехода δ записывают в форме списка команд вида $q_i a_j \to q_r a_s D$. (Так как это функция, определённая на $(Q \setminus \{q_0\}) \times \Gamma$, для каждой пары из незавершающего состояния и символа ленточного алфавита есть ровно одна команда). Среди элементов Γ выделяют специальный символ # (бланк, пробел, пустой символ, обозначается также как _, $\square$, ъ), не входящий в множество Σ.

Если K — конечное множество, то через K^* обозначается множество всех конечных последовательностей элементов из этого множества (слов в алфавите K). Последовательность из нуля элементов обозначается ε (или Λ) и называется *пустым словом*. На последовательностях определена операция *конкатенации* (приписывания), обозначаемая символом $\cdot$. Часто этот символ опускается, запись AB означает конкатенацию слов A и B. Под записью A^n понимается конкатенация n экземпляров слова A.

1°. Чему равняется A^0? A^1?

Конфигурацией машины Тьюринга называется слово вида $AqaB$, где $A, B \in \Gamma^*$, $a \in \Gamma$, а $q \in Q$.

2°. В каком алфавите записывается конфигурация?

3°. Покажите, что по конфигурации можно однозначно восстановить A, q. a и B.

Вычислением на машине Тьюринга называется последовательность конфигураций $c_1, \ldots, c_k$, в которой любые две соседние конфигурации c_l и c_{l+1} соотносятся следующим образом:

- если $c_l = Aq_i a_j B$ и в программе встречается команда $q_i a_j \to q_r a_s N$, то $c_{l+1} = Aq_r a_s B$;
- если $c_l = Aq_i a_j B$ и в программе встречается команда $q_i a_j \to q_r a_s R$, то $c_{l+1} = Aa_s q_r B$ (если $B = \varepsilon$, то $c_{l+1} = Aa_s q_r \#$);
- если $c_l = Aaq_i a_j B$ и в программе встречается команда $q_i a_j \to q_r a_s L$, то $c_{l+1} = Aq_r a a_s B$ (если $c_l = q_i a_j B$, то $c_{l+1} = q_r \# a_s B$).

4°. Покажите, что вычисление можно полностью восстановить, зная начальную конфигурацию и число шагов. Покажите, что вычисление может содержать не более одной конфигурации, содержащей q_0.

Неформально работа машины Тьюринга описывается так: имеется бесконечная лента, разбитая на ячейки. В каждой ячейке записан символ из Γ. У машины имеется каретка, в каждый момент указывающая ровно на одну ячейку. За один такт машина считывает символ с ячейки, на которую указывает, и в зависимости от внутреннего состояния переходит в новое состояние, заменяет содержимое ячейки и сдвигается влево, вправо или остаётся на месте. Конфигурация $AqaB$ означает, что машина находится

в состоянии q, указывает на ячейку с символом a, слева от этой ячейки записано A, справа — B. а все остальные ячейки заполнены $\#$.

Машина вычисляет (частично определённую) функцию $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$, если:

a) Для всех x, на которых f определена, существует вычисление на этой машине, начинающееся с конфигурации q_1x и заканчивающееся конфигурацией $q_0f(x)$;

b) Для всех x, на которых f не определена, не существует вычисления на этой машине, начинающегося с конфигурации q_1x и заканчивающегося конфигурацией, содержащей q_0.

5°. Покажите, что второе условие равносильно следующему: «Существует сколь угодно длинное вычисление, начинающееся с q_1x».

6. Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$. Опишите машины, вычисляющие функции: $f(x) = x$, $f(x) = 0$, нигде не определённую.

7. Пусть $\Sigma = \{1\}$. Опишите машины, вычисляющие функции: $f(1^n) = 1^{n+1}$, $f(1^n) = 1^{n-1}$, $f(1^n) = 1^{2n}$, $f(1^n) = 1^{n^2}$.

8. Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$. Опишите машины, вычисляющие функции: $f(x) = xx$, $f(x) = x\bar{x}$, где $\bar{x}$ — слово, полученное из x превращением нулей в единицы и наоборот, $f(x) = xx^R$, где x^R — слово x, записанное задом наперёд.

9. Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$. Опишите машины, вычисляющие функции: $f(x) = 2x$, $f(x) = x + 1$, $f(x) = x - 1$, где x понимается как двоичная запись натурального числа.

Машина вычисляет (частично определённую) функцию $f\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$, если:

a) Для всех пар (x, y), на которых f определена, существует вычисление на этой машине, начинающееся с конфигурации $q_1x\#y$ и заканчивающееся конфигурацией $q_0f(x, y)$;

b) Для всех пар (x, y), на которых f не определена, не существует вычисления на этой машине, начинающегося с конфигурации $q_1x\#y$ и заканчивающегося конфигурацией, содержащей q_0.

10. Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$. Опишите машины, вычисляющие функции $f(x, y) = x + y$, $f(x, y) = x - y$, где x и y понимаются как двоичные записи натуральных чисел.

11. Опишите машину, вычисляющую $f(x, y) = xy$ (умножение чисел в двоичной записи).

Также рассматривают распознающие (разрешающие) машины, у которых вместо одного завершающего состояния q_0 есть два: принимающее q_a и отвергающее q_r.

12°. Дайте формальное определение такой машины как кортежа.

Распознающая машина разрешает множество $A \subset \Sigma^*$, если:

a) Для всех x, лежащих в A, существует вычисление на этой машине, начинающееся с конфигурации q_1x и заканчивающееся конфигурацией, содержащей q_a;

b) Для всех x, не лежащих в A, существует вычисление на этой машине, начинающееся с конфигурации q_1x и заканчивающееся конфигурацией, содержащей q_r.

13. Пусть $\Sigma = \{1\}$. Опишите машины, распознающие множества: $\{1\}$, $\{1^n \mid n \vdots 2\}$, $\{1^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

14. Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$. Опишите машины, распознающие множества: $\{0\}$, $0^* = \{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $0^*1^* = \{0^n 1^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

15. Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$. Опишите машину, распознающую множество палиндромов, т.е. $\{x \mid x = x^R\}$.

16*. Назовём временем работы машины максимальную длину вычисления на входах длины n. Докажите, что никакая машина, распознающая множество палиндромов, не может работать за время $o(n^2)$.

Функция называется *вычислимой*, если её вычисляет какая-то машина Тьюринга.

17. Покажите, что множество вычислимых функций не изменится, если запретить машине стоять на месте (т.е. ограничиться машинами с функциями перехода вида $\delta\colon (Q \setminus \{q_0\}) \times \Sigma \to Q \times \Sigma \times \{L, R\}$).

18. Покажите, что множество вычислимых функций не изменится, если ограничить ленту с одной стороны. (Технически можно добавить слева спецсимвол $\triangleright$, который нельзя стирать и с которого нельзя двигаться влево).

19. Покажите, что множество вычислимых функций не изменится, если разрешить машине работать на нескольких лентах. (На каждой ленте своя каретка, способная двигаться независимо от других. Формализуйте такую машину самостоятельно).

20. Покажите, что множество вычислимых функций не изменится, если машина работает не на ленте, а на клетчатой плоскости. (Каретка одна, но может двигаться в любом из четырёх направлений).

21. Покажите, что множество вычислимых функций не изменится, если разрешить машине произвольные сдвиги (т.е. функция перехода имеет вид $\delta\colon (Q \setminus \{q_0\}) \times \Sigma \to Q \times \Sigma \times \mathbb{Z}$).

22*. Покажите, что множество вычислимых функций не изменится, если разрешить машине произвольный доступ (random access). Формальное определение такое: у машины есть две ленты: адресная и рабочая, специальное состояние q_{access}, а также два спецсимвола `W` и `R` в ленточном алфавите. Если машина оказывается в состоянии q_{access} в конфигурации $\mathrm{bin}(i)q_{access}\mathtt{W}\sigma$ на адресной ленте ($\mathrm{bin}(i)$ — двоичная запись числа i), то символ σ записывается в ячейку с номером i на рабочей ленте. Если машина оказывается в состоянии q_{access} в конфигурации $\mathrm{bin}(i)q_{access}\mathtt{R}$ на адресной ленте, то в следующую за содержащей `R` ячейку записывается символ из ячейки с номером i на рабочей ленте.

23. Пусть машине запрещено стирать символы (кроме #). Как следует определить вычисление функции на такой машине, чтобы множество вычислимых функций не изменилось?

24. Покажите, что множество вычислимых функций уменьшится, если запретить машине сдвигаться влево. (Указание: такая машина не может распознать язык $\{0^n 1^n \mid b \in \mathbb{N}\}$).

25. Покажите, что если разрешить машине иметь бесконечное множество состояний, то любая функция станет вычислимой.