**Программа курса «Дискретный анализ: 1 семестр»**

1. Оценки для факториалов и биномиальных коэффициентов. Оценки для C\_n^{n/2} с помощью тождества. Формула Стирлинга (б/д). Запись (c+o(1))^n. Оценки биномиальных коэффициентов вида C\_n^{[an]}, a \in (0,1). Аналогичные результаты для полиномиальных коэффициентов. Асимптотика для C\_n^k при k^2 = o(n). Оценки той же величины при бОльших k. Асимптотики для C\_n^{n/2}/C\_n^{n/2-x}.
2. Определение графа, орграфа, мультиграфа, псевдографа и т.д. Эквивалентные определения дерева (4 штуки). Формула Кэли. Унициклические графы. Точная формула для числа различных унициклических графов (надо уметь доказывать лемму о количестве лесов) и асимптотика (на лекции не объяснял аккуратно а) почему сумму можно заменить интегралом; б) почему интеграл от плотности нормального распределения равен 1). Обзор результатов о числе связных графов с данным количеством вершин и ребер.
3. Маршруты в графах (цепи, циклы). Эйлеровские графы (3 эквивалентных определения). Критерий эйлеровости орграфа.
4. Гамильтоновы циклы и цепи. Достаточное условие Дирака гамильтоновости графа. Вершинная связность и число независимости графа. Достаточное условие гамильтоновости в их терминах. Пример с графом G(n,3,1). Гамильтоновы цепи в турнирах: нижняя оценка с д-вом, верхняя – б/д.
5. Последовательности и графы де Брёйна. Правило «ноль лучше единицы».
6. Плоские и планарные графы. Формула Эйлера (немного нестрого топологические места). Двойственный граф. Теоремы Хопкрофта— Тарджана и Хивуда—Рингеля. Непланарность К5. Существование пяти правильных многогранников. 6-раскрашиваемость любой карты на плоскости. Гомеоморфизм. Критерий Куратовского (б/д).
7. Независимые множества и клики. Число независимости и кликовое число. Теорема Турана о числе ребер в графе с данным числом вершин и числом независимости. Следствие с асимптотической оценкой в случае последовательности графов. Дистанционные графы. Оценка числа ребер у дистанционного графа на плоскости. Понятие симплекса в пространстве. Оценка числа ребер в последовательности дистанционных графов в произвольной размерности. Сравнение с обычной теоремой Турана.
8. Случайные графы. Неравенства Маркова и Чебышёва (надо помнить д-ва). Неравенство для случайного блуждания. Моменты и факториальные моменты. Связность случайного графа: случаи p = сln n/n при c > 1 и c < 1 с доказательством; теорема о (ln n + c + o(1))/n – только формулировка. Теорема о гигантской компоненте (б/д).
9. Хроматическое число, число независимости, кликовое число и соотношения между ними. Сравнение оценок хроматического числа через кликовое число и число независимости в терминах случайных графов: одна «почти всегда» значительно лучше другой (распределение кликового числа и числа независимости). Теоремы Боллобаша о хроматическом числе случайного графа (б/д). Пояснения к ним: 1) p = o(1/n^2); 2) p = o(1/n); 3) p = c/n, c< 1, - б/д; 4) функция из второй теоремы Боллобаша может стремиться к бесконечности. Жадный алгоритм построения независимого множества. Теорема о том, что почти наверное жадный алгоритм найдет множество, размер которого лишь, как максимум, в 2 раза отличается от реального. Теорема Кучеры о слабости жадного алгоритма на специальных графах (б/д). Теорема Эрдеша о графе с большим обхватом и большим хроматическим числом.
10. Гиперграфы. Теорема Эрдеша – Ко – Радо (максимальное число ребер в 1-пересекающемся гиперграфе). t-пересекающиеся гиперграфы, величина f(n,k,t). Пример, когда нижняя оценка f(n,k,t) \ge C\_{n-t}^{k-t} заведомо не точна. История последовательных продвижений в задаче: теорема Эрдеша – Ко – Радо (общий случай), теорема Франкла, теорема Уилсона, теорема Алсведе – Хачатряна (все б/д, но с подробными комментариями). Граф пересечений для полного однородного гиперграфа. Его кликовое число и число независимости.
11. Кнезеровский граф (граф непересечений для полного однородного гиперграфа). Верхняя оценка его хроматического числа. Простые нижние оценки. Примеры конкретных кнезеровских графов. Теорема Ловаса о хроматическом числе кнезеровского графа (здесь теорема Борсука – Улама – Люстерника – Шнирельмана в разных формулировках, но с доказательством только в случае плоскости и трехмерного пространства).
12. Величина m(n,k,t). Точное значение для m(n,3,1): явная конструкция и оценка по индукции. Линейно-алгебраическая оценка для m(n,3,1). Аналогичная оценка для m(n,5,2) и ее асимптотическая неулучшаемость. Общая теорема Франкла – Уилсона для m(n,k,k-p). Замечание о непростом «модуле». Теорема Франкла—Уилсона для случая, когда k-2p > 0. Точность обеих теорем при постоянных k, t (величина h(n,k,t), ее связь с теорией кодирования, теорема Редля б/д).
13. Хроматические числа пространств. Историческая справка. Нижняя оценка хроматического числа пространства с помощью результатов для m(n,k,t): интерпретация величины m(n,k,t) как числа независимости дистанционного графа. Возможные улучшения.
14. Проблема Борсука. Историческая справка. Связь с теоремой Борсука – Улама – Люстерника – Шнирельмана. Контрпримеры к гипотезе Борсука (история). Контрпример к гипотезе Борсука в размерности 946. Идея общей нижней оценки числа Борсука с помощью теоремы Франкла – Уилсона. Уточнения.