

Задачи по курсу случайных графов. Часть 1

1. Докажите, что для любого свойства \mathcal{Q} выполнено

$$\mathbb{P}(\Gamma(n, p) \models \mathcal{Q} | |\Gamma(n, p)| = m) = \mathbb{P}(\Gamma(n, m) \models \mathcal{Q}).$$

2. Докажите, что любое выпуклое свойство есть пересечение возрастающего и убывающего свойств.
3. Пусть \mathcal{Q} — выпуклое свойство подмножеств Γ и $m_1 \leq m \leq m_2 \leq N$, $0 \leq p_1 \leq p \leq p_2 \leq 1$. Докажите, что

$$\mathbb{P}(\Gamma(m) \models \mathcal{Q}) \geq \mathbb{P}(\Gamma(m_1) \models \mathcal{Q}) + \mathbb{P}(\Gamma(m_2) \models \mathcal{Q}) - 1,$$

$$\mathbb{P}(\Gamma(p) \models \mathcal{Q}) \geq \mathbb{P}(\Gamma(p_1) \models \mathcal{Q}) + \mathbb{P}(\Gamma(p_2) \models \mathcal{Q}) - 1,$$

4. Докажите лемму 1.

Лемма 1. Пусть \mathcal{Q} — монотонное свойство подмножеств $\Gamma(n)$, $a \in [0, 1]$ — фиксированная константа, а $m = m(n) \in [0, N]$ — некоторая последовательность. Если для любой функции $p = p(n) \in [0, 1]$ с условием $p = m/N + O\left(\sqrt{m(N-m)/N^3}\right)$ выполнено

$$\mathbb{P}(\Gamma(n, p) \models \mathcal{Q}) \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

то

$$\mathbb{P}(\Gamma(n, m) \models \mathcal{Q}) \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

5. Докажите, что \hat{m} является пороговой функцией для возрастающего свойства \mathcal{Q} тогда и только тогда, когда $m_{\mathcal{Q}}^* = \Theta_{\mathbb{P}}(\hat{m})$, т.е. для любой положительной функции $w(n) \rightarrow \infty$ выполнено

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{w(n)}\hat{m} \leq m_{\mathcal{Q}}^* \leq w(n)\hat{m}\right) \rightarrow 1.$$

6. Докажите, что в равномерной модели случайных подмножеств для монотонного свойства \mathcal{Q} существует точная пороговая функция тогда и только тогда, когда

$$\frac{m_{\mathcal{Q}}^*}{m(1/2; n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

7. Докажите, что в биномиальной модели случайных подмножеств для монотонного свойства \mathcal{Q} существует точная пороговая функция тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ выполнено

$$\frac{p(\varepsilon; n)}{p(1/2; n)} \rightarrow 1.$$

8. Докажите, что в биномиальной модели случайных подмножеств для монотонного свойства \mathcal{Q} пороговая вероятность \hat{p} является точной тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ выполнено

$$\delta(\varepsilon) = p(1 - \varepsilon; n) - p(\varepsilon; n) = o(\hat{p}).$$