Задачи по курсу случайных графов. Часть 2

1. Пусть $\Gamma(n) = \{1, \ldots, n\}$. Найдите пороговую вероятность в $\Gamma(n,p)$ для свойства содержать тройку (x,y,z) — решение уравнения $x = y + z$.

2. Пусть $\Gamma(n) = \{1, \ldots, n\}$. Найдите пороговую вероятность в $\Gamma(n,p)$ для свойства содержать арифметическую прогрессию длины k.

3. Докажите следствие из теоремы Прохорова в случае а) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$, б) в общем случае.

   Следствие. *Пусть $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность вероятностных мер на полном сепарабельном метрическом пространстве $\mathcal{S}$. Если она является плотной и любая ее слабо сходящаяся подпоследовательность слабо сходится к одной и той же вероятностной мере $\mathcal{Q}$, то $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{Q}$.*

4. Докажите теорему о равномерной интегрируемости.

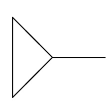
   Теорема. (о равномерной интегрируемости) *Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. Тогда $\mathsf{E}\xi_n \to \mathsf{E}\xi$ тогда и только тогда, когда $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ равномерно интегрируема.*

5. Докажите, что
$$\mathsf{E}(X_G)_k = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,f(n,G)\} \\ i_j \neq i_m}} \mathsf{E} I_{G_{i_1}} \ldots I_{G_{i_k}}.$$

6. Пусть $G = C_3 \sqcup C_3$ — два непересекающихся треугольника, $pn \to c > 0$. Докажите, что тогда $X_G \xrightarrow{d} \frac{1}{2} Z(Z-1)$ при $n \to \infty$, где $Z \sim Pois(c^3/6)$.

7. Пусть $G = C_3 \sqcup C_4$ — два непересекающихся цикла длины 3 и 4, $pn \to c > 0$. Докажите, что тогда $X_G \xrightarrow{d} Z_1 Z_2$, где Z_1 и Z_2 — независимы, $Z_1 \sim Pois(c^3/6)$, $Z_2 \sim Pois(c^4/8)$.

8. Пусть $G = C_3 + K_2$ — треугольник с одной висячей вершиной,

   Пусть $np \to c > 0$. Докажите, что $X_G \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{Z} W_i$, где $(W_i, i \in \mathbb{N})$ — независимые $Pois(3c)$ случайные величины, а $Z \sim Pois(c^3/6)$, также независимая с ними. Докажите также, что
$$\mathsf{P}(X_G = 0) \to e^{-(1-e^{-3c})c^3/6}.$$