Обобщённая формула обращения Мёбиуса

Пусть $\langle A, \leqslant \rangle$ — частично упорядоченное множество, причём для каждого элемента $a \in A$ существует лишь конечное число элементов, меньших a (везде в листке подразумевается, что мы рассматриваем только такие множества). *Функция Мёбиуса* μ для частично упорядоченного множества $\langle A, \leqslant \rangle$ определяется на множестве сравнимых пар (a, b), где $a, b \in A$ и $a \leqslant b$, при помощи рекуррентного соотношения:

$$\mu(a,b) = \begin{cases} 1, a = b; \\ -\sum\limits_{a \leqslant z < b} \mu(a,z), \text{ если } a < b. \end{cases}$$

1. а) Пусть $a, b \in \langle A, \leqslant \rangle$, $a < b$, μ — функция Мёбиуса на $\langle A, \leqslant \rangle$. Докажите, что $\sum_{a \leqslant z \leqslant b} \mu(a,z) = 0$.

б) Пусть теперь функция μ' определяется на множестве сравнимых пар (a, b), $a \leqslant b$ при помощи рекуррентного соотношения

$$\sum_{a \leqslant z \leqslant b} \mu'(z,b) = \begin{cases} 1, a = b; \\ 0, \text{ если } a < b \end{cases}.$$

Докажите, что $\mu = \mu'$, то есть для любой сравнимой пары $a \leqslant b$ верно равенство $\mu(a,b) = \mu'(a,b)$. В частности, для функции μ выполнено то же соотношение, что и для μ'.

2*. (*Обобщённая формула обращения Мёбиуса*) Пусть $\langle A, \leqslant \rangle$ — частично упорядоченное множество, μ — обобщённая функция Мёбиуса на $\langle A, \leqslant \rangle$, $f : A \to \mathbb{R}$ — произвольная функция. Определим функцию $g : A \to \mathbb{R}$ следующим образом: $g(x) := \sum_{y \leqslant x} f(y)$. Тогда $f(x) = \sum_{y \leqslant x} \mu(y,x) g(y)$.

3°. Задано ч.у.м. на множестве элементов a, b, c, d, e, порожденное соотношениями $a \leqslant b$, $a \leqslant c$, $b \leqslant d$, $c \leqslant d$, $d \leqslant e$. Найдите значения функции Мёбиуса $\mu(a,b)$ и $\mu(a,e)$.

4°. Для каких чисел $n \in \mathbb{Z}$ существуют частично упорядоченное множество $\langle A, \leqslant \rangle$ и такие элементы $a, b \in A$, что выполнено равенство $\mu(a,b) = n$?

5. Рассмотрим ч.у.м. $\mathbb{N}$ с порядком «делится на».

а)$^\bullet$ Докажите, что $\mu(a,b) = \mu^*(\frac{b}{a})$, где μ^* — обычная функция Мёбиуса.

б) Как изменится функция Мёбиуса, если заменить множество $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N} \setminus \{5\}$ (а порядок оставить прежний)?

в) Как изменится функция Мёбиуса, если заменить множество $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N} \setminus \{15\}$ (а порядок оставить прежний)?

6. Рассмотрим ч.у.м. $\mathbb{N}$ с порядком $\leqslant$. Найдите функцию Мёбиуса для этого ч.у.м. Как выглядит формула обращения Мёбиуса в данном случае?

Разбиения

Разбиением натурального числа n на слагаемые называется представление n в виде суммы

$$n = x_1 + \ldots + x_t,$$

где $x_1 > 0, \ldots, x_t > 0$ — натуральные числа. При этом разбиения называются *неупорядоченными,* если два таких разбиения одинаковы, коль скоро они отличаются только порядком слагаемых. Например, неупорядоченные разбиения $5 = 3 + 2$ и $5 = 2 + 3$ совпадают. В противном случае говорят об *упорядоченных разбиениях.*

7$^\bullet$. а) Найдите количество упорядоченных разбиений числа n на k слагаемых. **б)** Найдите общее количество упорядоченных разбиений числа n на слагаемые.

8°. Сколько существует диаграмм Юнга произвольного веса, но имеющих не более p строк и не более q столбцов?

9°. На доске написано несколько целых положительных чисел: a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Пишем на другой доске следующие числа: b_0 — сколько всего чисел на первой доске, b_1 — сколько там чисел, больших единицы, b_2 — сколько там чисел, больших двойки, и т. д., пока получаются положительные числа. На этом заканчиваем — нули не пишем. На третьей доске пишем числа c_0, c_1, c_2, $\ldots$, построенные по числам второй доски аналогичным образом. Докажите, что наборы чисел на первой и третьей досках совпадают.

10$^\bullet$. Докажите, что число неупорядоченных разбиений числа n на не более чем k слагаемых равно числу неупорядоченных разбиений $n + k$ на k слагаемых.

11$^\bullet$. Докажите, что число неупорядоченных разбиений числа n на не более чем k слагаемых равно числу неупорядоченных разбиений $n + \frac{k(k+1)}{2}$ на k различных слагаемых.

12$^\bullet$. Докажите, что число неупорядоченных разбиений n на k слагаемых равно числу неупорядоченных разбиений n на слагаемые, наибольшее из которых равно k.
13°. Докажите, что число неупорядоченных разбиений $a-b$ на $c-1$ слагаемых, не превосходящих b, равно числу неупорядоченных разбиений $a-c$ на $b-1$ слагаемых, не превосходящих c.

Домашнее задание на 10.11.

Степенные ряды

14°. **а)** Пусть $F = 1+t+t^2+\ldots$, $G = 1-t+t^2-t^3+\ldots$. Найдите $F+G$, $F\cdot G$. **б)** Пусть $F = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}t^k$, $G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}t^k$. Найдите $F\cdot G$ и F^2.

Ряд G называется *обратимым,* если существует такой ряд F, что $F\cdot G = 1$. F называется обратным к G, и обозначается так: $F = G^{-1}$.

15°. Докажите, что ряд $G = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \ldots$ обратим тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0$, причём обратный ряд G^{-1} единственен.
16°. Найдите **а)** $(1-t)^{-1}$; **б)** $(2-t)^{-1}$; **в)** $((1-t)^2)^{-1}$; **г)** $((1-t)^m)^{-1}$.
17. **а)°** При каких условиях на степенной ряд F его можно разделить на степенной ряд G (то есть уравнение $G\cdot X = F$ разрешимо относительно неизвестного степенного ряда X)? **б)** При каких условиях на степенной ряд F разрешимо уравнение $X^2 = F$? Найдите X такой, что $X^2 = 1+t$. **в)** Существует ли степенной ряд X, удовлетворяющий уравнению $tX^2 - X + 1 = 0$?