ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: СПИСОК ТПОВЫХ ЗАДАЧ К ЭКЗАМЕНУ (2014 Г.)

1. Обладают ли свойствами минимальности, транзитивности, топологического перемешивания

а) поворот окружности $R_\alpha\colon\ x \to x + \alpha \pmod 1$

б) сдвиг на торе $R_(\alpha_i)(x_i) \to (x_i + \alpha_i \pmod 1)$, $(x_i) \in \mathbb{T}^n$

в) топологический сдвиг Бернулли (преобразование пекаря на канторовском множестве $K \times K$)

г) автоморфизм аносова T_A

д) топологическая марковская цепь с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

е) символический сдвиг на указанном множестве Y

ж) система, порождённая подстановкой $0 \to 0010$, $1 \to 1$, или эквивалентно правилом

$$w_{n+1} = w_n w_n 1 w_n, \qquad w_0 = 0$$

з) одометр — преобразование прибавления 1 в пространстве $\mathbb{Z}_{(2)} = \{\sum_{n=0}^{\infty} x_k 2^k\}$, где $x_k \in \{0, 1\}$

Пример для пункта е): Y — множество последовательностей из 0 и 1, не содержащих подслова “11”.

2. Обладают ли свойствами эргодичности, перемешивания, слабого перемешивания* системы, перечисленные в задаче 1? Для системы в пункте д) указывается матрица вероятностей переходов, например, $\begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Для символического сдвига в пункте е) указывается определённая инвариантная мера.

3. Обладают ли собственными функциями системы, перечисленные в задаче 1? Если да, то перечислите их. Составляют ли собственные функции базис в пространстве $L^2(X, \mu)$.

4. Вычислите действие оператора Купмана $\hat{T}$ на характеры для автоморфизма Аносова, а также для сдвига на торе $\mathbb{T}^2$. Проверьте, стремится ли к нулю последовательность $\langle \hat{T}^k f,\ f\rangle$, где $f(x, y) = |\sin \pi x \cdot \sin \pi y|$?

5. Найдите замыкание траектории $X(t)$ точки, совершающей малые колебания в потенциальном поле $V(X)$:

$$\ddot{X} = -\operatorname{grad} V(X),$$

где $X = (x, y)$ и $V(X) = 2x^2 + xy + 2y^2$.

6. Вычислите скобку Пуассона функций $f(x, y) = x^2 + y^2$ и $g(x, y) = -xy^3$ относительно стандартной симплектической структуры на $\mathbb{R}^2$.

7. Найдите замыкание множества всех периодических орбитх, затем, множество неблуждающих точек, минимальные множества для следующих систем:

(i) сдвиг на торе $\mathbb{T}^n$
(ii) автоморфизм Аносова
(iii) символический сдвиг Бернулли
(iv) $z \mapsto z^2$
(v) система, заданная системой дифференциальных уравнений в полярных координатах

$$\dot{r} = -r^2 + 4r - 3, \qquad \dot{\varphi} = 1$$

Обладает ли заданная динамическая система рекурентной орбитой?

8. Найдите омега-предельное множество заданной точки x относительно непрерывного преобразования f. Примеры: (А) системы из задачи 7; (Б) символический сдвиг $f\colon (x_i) \mapsto (x_{i+1})$ и точка x, где $x_i = 1 \iff |i| = 3^k$ и $x_i = 0$ иначе.

9*. Постройте марковское кодирование автоморфизма Аносова.

10. Найдите отображение Пуанкаре для линейного потока на торе $\mathbb{T}^2$, заданного уравнениями $\dot{x} = \alpha$, $\dot{y} = 1$, и трансверсальной кривой $y(x) = \varepsilon \sin(2\pi x)$.

11.

а) Постройте диаграмму конечных кодов для преобразования $T\colon\ k \to k + 5 \pmod 7$.
б) Докажите, что при кодировании поворота окружности на иррациональный угол относительно разюиения $([0, \alpha), [\alpha, 1)]$ возникают последовательности, обладающие символической сложностью $p(\ell) = \ell + 1$.
в) Приведите пример бесконечной двоичной последовательности (x_i), такой что $p(\ell) \geq c \cdot 2^\ell$.
г) Проверьте, что при условии $p(\ell_0) = \ell_0$ последовательность является периодической.

12. Вычислите энтропию а) преобразования Аносова, б) символического сдвига Бернулли, в) сдвига на торе ($h(T) = 0$)

13*. Обладает ли система простым спектром? Иными словами, верно ли, что функция кратности оператора $\hat{T}$ равна 1 или, что эквивалентно, можно ли найти в пространстве $L^2(X, \mu)$ собственный вектор для $\hat{T}$?

14*. Пусть $T\colon \mathbb{T}\times\mathbb{Z}_{(2)}\colon (x, y) \to (x+\alpha, y+1)$, где $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Вычислите группу собственных значений Λ для оператора $\hat{T}$.