ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: СПИСОК ЗАДАЧ К ЗАНЯТИЮ № 11 (*19.11.14*)

Группа А

1. Докажите, что для любой непрерывной функции $f \in C(\mathbb{T})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} R_\alpha^k f(x) = \int_0^1 f(y)\, dy$$

(свойство равномерной распределённости).

2. Докажите, что собственные числа оператора $\hat{T}$ образуют группу (подгруппу $S^1 = \{|z| = 1\}$), а также проверьте, что для любой собственной функции $\varphi(x)$ эргодического автоморфизма T выполнено $|\varphi(x)| \equiv \mathrm{const}$. Далее, установите, что, если $\hat{T}\varphi = \lambda\varphi$ и $\hat{T}\psi = \nu\psi$, то функция $\varphi(x)\psi(x)$ также является собственной.

3. Проверьте, что свойство слабого перемешивания влечёт отсутствие собственных функций у оператора $\hat{T}$, кроме констант, и, в частности, эргодичность.

4. Докажите, что из свойства слабого перемешивания следует эргодичность меры $\mu\times\mu$ по отношению к автоморфизму $T \times T$, действующему на прямом произведении $X \times X$. *Указание*: Исследуйте собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{T} \times \hat{T}$.

5. Пусть задана подстановка $0 \to 0010$, $1 \to 1$. Рассмотрим последовательность конечных слов W_n, в которой следующее слово получается из предыдущего применением подстановочного правила. Проверьте, что $W_{n+1} = W_n W_n 1 W_n$ и, в частности, W_n является префиксом слова W_{n+1}. Определим бесконечное (одностороннее) слово W_∞, продолжающее каждое из слов W_n.

Докажите, что *эмпирическая мера* μ, порождённая словом W_∞, корректно определена. Иными словами, проверьте, что эмпирические распределения сходятся при $n \to \infty$, и корректно задают стационарное распределение на конечных блоках $[u]$:

$$\mu([u]) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|W_n|} \sum_{0\le j\le |W_n|-|u|} \mathrm{match}(j, u, W_n),$$

где $\mathrm{match}(j, u, W_n) = 1$, если слово u входит в слово W_n, начиная с позиции j, и 0 иначе.

6. Докажите, что мера μ, определённая в задаче 5 является эргодической относительно преобразования сдвига.

7. Установите следующий комбинаторный факт: из произвольного покрытия отрезка $[0, 1]$ интервалами можно выбрать подпокрытие, в котором интервалы дизъюнктны, причём это подпокрытие накрывает не менее половины длины отрезка.

Группа B

Определение. Говорят, что преобразование T обладает кратным перемешиванием кратности 2, и пишут $T \in \mathrm{Mix}(2)$, если для любых измеримых A, B и C выполнено

$$\mu(T^{k_0}A \cap T^{k_1}B \cap T^{k_2}C) \to \mu(A)\,\mu(B)\,\mu(C) \quad \text{при} \quad |k_i - k_j| \to \infty.$$

1 (*Система Ледрапье*). Рассмотрим случайное поле $\xi\colon \mathbb{Z}^2 \to \{0,1\} = \mathbb{F}_2$, в котором конфигурации удовлетворяют уравнению

$$\xi(z) + \xi(z+(1,0)) + \xi(z+(0,1)) = 0 \pmod 2.$$

Проверьте, что множество конфигураций $X = \{\xi\}$ замкнуто в слабой топологии. Определим меру μ на пространстве конфигураций таким образом, что последовательность $\xi(k,0)$, где $k \in \mathbb{Z}$, то есть ограничение ξ на горизонтальную координатную ось задаёт бернуллиевскую последовательность. Проверьте корректность определения меры μ и установите, что мера μ является инвариантной относительно стандартного действия группы $\mathbb{Z}^2$

$$S^g\colon\ \xi(z) \mapsto \xi(g+z), \qquad g \in \mathbb{Z}^2.$$

Докажите, что действие S не является перемешивающим с кратностью 2, а именно,

$$\mu(A \cap S^{(2^n,0)}A \cap S^{(0,2^n)}A) \not\to \mu(A)^3$$

для некоторого измеримого множества A.

2. В условиях задачи 1 докажите, что действие S является перемешивающим.

3. Для функции $f \in C(\mathbb{T})$ и преобразования $T\colon\ x \mapsto 2x \pmod 1$ определим значение

$$m(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(x).$$

Докажите, что область определения $D(m)$ функции $m(x)$ всюду плотна в $\mathbb{T}$. Верно ли, что функцию $m(x)$ можно продолжить до непрерывной функции на окружности?

4. Докажите, что слабое перемешивание эквивалентно отсутствию собственных значений у оператора $\hat{T}$ (*непрерывность спектра*).

5. Пусть T — обратимое, сохраняющее меру эргодическое преобразование пространства (X,μ). На пространстве (Y,η) рассмотрим тождественное преобразование $I\colon\ y \mapsto y$. Докажите, что на прямом произведении пространств $X \times Y$ не существует меры ν, кроме $\mu \times \eta$, которая была бы инвариантна относительно $T \times I$ и имела бы μ и η в качестве проекций.

Напоминание: Лемма Рохлина–Халмоша утверждает, что для любого эргодического автоморфизма T и любых $h \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ найдётся башня Рохлина U высоты h, такая, что $\mu(U) > 1 - \varepsilon$.

6. Верна ли следующая усиленная форма леммы Рохлина–Халмоша?

Для некоторой последовательности высот $h_n \to \infty$ существуют башни Рохлина высоты h_n, полностью накрывающие пространство X, а именно,

$$X = B_n \sqcup TB_n \sqcup T^2B_n \sqcup \ldots \sqcup T^{h_n-1}B_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

7. Пусть числа p и q взаимно просты. Докажите, что фазовое пространство любого эргодического автоморфизма разбивается на две непересекающиеся башни Рохлина высот p и q.

8. Докажите аналог утверждения задачи 7(A) для покрытий единичного кватрата $[0,1]\times[0,1]$ открытыми квадратами с наилучшим коэффициентом. Иными словами, докажите, что существует универсальная константа $a>0$, такая, что из любого покрытия открытыми квадратами $\{Q_j\}$ можно выбрать подпокрытие $\{Q_{j_k}\}$ со свойствами

$$Q_{j_k}\cap Q_{j_l}=\varnothing, \qquad \mu\left(\bigcup_k Q_{j_k}\ \cap\ [0,1]^{\times 2}\right)\geq a.$$

Группа C

1*. В условиях задачи 5(B) ответьте на следующий вопрос: является ли тождественное преобразование единственным с таким свойством?

2 (*Теорема Реньи***).** Пусть T — обратимое эргодическое преобразование на пространстве $(X,\mathscr{A},\mu)$. Докажите, что свойство перемешивания эквивалентно следующему условию

$$\forall\, A\in\mathscr{A}\quad \mu(A\cap T^kA)\to\mu(A)^2, \qquad k\to\infty.$$

3. Приведите пример пары инволюций S и R, где $S^2=R^2=\mathrm{Id}$, такой, что произведение $T=RS$ эргодично.

4. Верно ли, что из эргодичности следует кратная возвращаемость для любого $m\geq 2$?

$$\forall\, A\in\mathscr{A}\quad \exists\, k_1(n),\dots,k_m(n)\qquad \mu(T^{k_1(n)}A\cap\dots\cap T^{k_m(n)}A)>0,$$

где $|k_i(n)-k_j(n)|\to\infty$ при $n\to\infty$ и $i\neq j$.