ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: СПИСОК ЗАДАЧ К ЗАНЯТИЮ № 8 (*27.11.14*)

Группа A

Мы говорим, что функция $f(t)$, определённая на прямой $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$, является *почти периодической по Бору*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $L = L(\varepsilon)$ и последовательность $\Delta_j \to +\infty$, $\Delta_0 = 0$, такая, что $|\Delta_j - \Delta_{j+1}| \leq L$ и $|f(t + \Delta_j) - f(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

1. Рассмотрим фазовый поток g^t постоянного векторного поля на торе $X = \mathbb{T}^2$ (или $\mathbb{T}^n$). И пусть $F(x)$ — произвольная непрерывная функция на X, а также дана точка $x_0 \in X$. Проверьте, что функции вида $f(t) = F(g^t(x_0))$ являются почти периодическими по Бору.

2. Проверьте, что тригонометрические полиномы вида

$$Q(t) = c_1 e^{i\omega_1 t} + \ldots + c_n e^{i\omega_n t}$$

являются почти периодическими.

3. Проверьте, что результат задачи 2 верен и для рядов, где $\sum_n |c_n| < \infty$.

Одометром (бинарным одометром) называется преобразование T прибавления $1 = \ldots 001$ в топологической группе

$$\mathbb{Z}_{(2)} = \left\{ x = \ldots x_2 x_1 x_0 \colon \boldsymbol{x}_i \in \{0, \} \right\},$$

где сложение элементов производится по стандартному правилу сложения в столбик. Данная группа называется *группой целых 2-адических чисел.*

4. Проверьте, что одометр T задаёт непрерывное взаимно однозначное преобразование $\mathbb{Z}_{(2)}$ (в частности, проверьте корректность преобразования $x \mapsto x + 1$ на примере различных значений x). Далее докажите, что T сохраняет естественную борелевскую меру.

5. Найдите собственные функции оператора $\hat{T}$ для бинарного одометра.

Группа B

Джойнингом преобразований T и S, действующих на пространствах (X, μ) и (Y, η) называется произвольная $T \times S$-инвариантная мера ν на прямом произведении $X \times Y$, такая, что проекции меры ν на координатные оси X и Y совпадают с μ и η соответственно: $\nu(A \times Y) = \mu(A)$, $\nu(X \times B) = \eta(B)$. В случае когда T идентично S, меру ν называют *самоприсоединением.*

1. Известно, что любое самоприсоединение ν обладает представлением:

$$\int_{X \times Y} f(x)\, g(y)\, d\nu = \langle Af, g \rangle \,,$$

где A — некоторый линейный (ограниченный, марковский) оператор в $L^2(X, \mu)$.

Вычислите A для джойнингов:

а) $\mu \times \mu$
б) $\Delta(A \times B) = \mu(A \cap B)$
в) $\Delta_S(A \times B) = \mu(SA \cap B)$, где $ST = TS$

2. Докажите, что преобразование T перемешивает тогда и только тогда, когда джойнинг $\mu \times \mu$ является слабым пределом последовательности Δ_{T^k}.

3. Приведите пример функции, имеющей ε_n-почти периоды, $|f(x+L_n) - f(x)| < \varepsilon_n$, где $L_n \to +\infty$ и $\varepsilon_n \to 0$, но не являющейся почти периодической по Бору.

4. Докажите, что множество $\mathscr{P}$ всех почти периодических функций на прямой $\mathbb{R}$ замкнуто относительно сложения и умножения.

5. Пусть $f(t) = \sum_i a_i e^{i\alpha_i t}$, $g(t) = \sum_j b_j e^{i\beta_i t}$. Вычислите аналогичное разложение для функции $f(t)g(t) = \sum_k c_k e^{i\omega_k t}$. Докажите, что ряд $\sum_k |c_k|$ сходится, а также, что коэффициенты c_k, ω_k определены однозначно.

6. Пусть $T\colon\ \mathbb{T} \times \mathbb{Z}_{(2)}\colon\ (x, y) \to (x + \alpha, y + 1)$, где $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Вычислите группу собственных значений Λ для автоморфизма T.

Группа C

1. Предположим, что как T, так и S обладают дискретным спектром, то есть полной системой собственных функций, причём собственные значения T образуют группу Λ_T, а собственные значения S — группу Λ_S, и кроме того,

$$\Lambda_T \cap \Lambda_S = \{1\}.$$

Докажите, что не существует джойнингов T и S, кроме $\mu \times \nu$.

2. Предположим, что непрерывная функция f раскладывается в ряд Фурье в $L^2(\mathbb{R})$, причём $\sum_n |c_n|^2 < \infty$, но $\sum_n |c_n| = \infty$. Может ли при этои функция f быть почти периодической?

3. Докажите, что преобразование сдвига S для символической системы, порождённой подстановкой $0 \to 0010$, $1 \to 1$, обладает следующим свойством: существует последовательность $h_n \to \infty$, такая, что

$$(*) \qquad \hat{T}^{h_n} \to \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + \hat{T}).$$

4. Далее докажите, что преобравзоание, обладающее свойством $(*)$ н е может иметь собственных значений $\lambda \neq 1$.