Динамические системы: Список задач к занятию №3 (*17.09.14*)

Группа А

1. При каких значениях α поворот окружности R_α является минимальным? Обладает ли R_α свойством топологического перемешивания?

2. Рассмотрим сдвиг на торе $R_{\alpha,\beta}\colon\ (x,y)\mapsto(x+\alpha,y+\beta)$. При каких α и β данный сдвиг является транзитивным? минимальным?

3. Проверьте свойства минимальности и топологического перемешивания для аналога преобразования пекаря, действующего на квадрате множества Кантора $K\times K$,

$$T\colon\ (x,y)\to\left(3x-x_1,\frac{1}{3}(y+x_1)\right).$$

Как может быть устроено замыкание полуорбиты точки для этого преобразования? Докажите, что периодические точки T всюду плотны в $K\times K$.

4. Обладает ли свойством минимальности преобразование сдвига на замкнутом множестве X двоичных последовательностей (x_i), удовлетворяющих следующему линейному уравнению?

$$a_0x_i+a_1x_{i+1}+\cdots+a_nx_{i+n}=0 \pmod 1,\quad i\in\mathbb{Z}.$$

Изменится ли ответ, если вместо уравнения рассмотреть систему линейных зависимостей?

5. Докажите, что преобразование Аносова T_A двумерного тора, заданное умножением на матрицу $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, обратимо, и найдите обратное к нему. Докажите, что умножение матрицы A^k на вектор $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ даёт вектор $\begin{pmatrix}b_{2k}\\b_{2k-1}\end{pmatrix}$, где (b_n) — последовательность чисел Фибоначчи.

6. Рассмотрим множество $M_N=(1/N)\mathbb{Z}^2$ на $\mathbb{T}^2$, то есть множество точек тора, у которых обе координаты являются дробями со знаменателем N. Докажите, что A биективно отображает M_N на себя. Докажите, что ограничение A на M_N имеет период, и путь $P(N)$ — минимальный период A_{M_N}. Докажите, что $P(N)\le N^4$.

7. Верно ли, что для замкнутой ломаной γ на торе $\mathbb{T}^2$, состоящей из 4 отрезков, таких, что при переходе от i-го к $i+1$ отрезку кривая поворачивает на 90° (п.ч.с.), существует область U со свойством $\partial U=\gamma$?

8. Рассмотрим линейное преобразование тора, заданное умножением на матрицу $\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}$. Является ли оно обратимым?

9. Пусть A_1 — обратимая матрица с целыми коэффициентами имеющая пару вещественных собственных значений $0<\lambda_1<1<\lambda_2$ (будем называть такую матрицу *гиперболической*). Докажите, что собственные прямые ℓ_1 и ℓ_2 для оператора A_1 имеют иррациональный тангенс угла наклона (относительно горизонтальной координатной оси).

10. Приведите пример транзитивного, но не минимального гомеоморфизма. Существуют ли гладкий поток на компактном многообразии с таким свойством?

Группа B

1. Обладает ли свойством минимальности следующее преобразование отрезка?

$$f\colon\ [0,1]\to[0,1]\colon\ x\mapsto ax(1-x),\qquad 0<a\le 4.$$

2. Придумайте пример транзитивного гомеоморфизма T, такого, что T^k *не* является транзитивным для некоторого $k>1$.

3. Проверьте, будут ли обладать свойством минимальныым степени преобразований: поворота окружности, сдвига на торе, преобразования пекаря на $K\times K$?

4. Докажите следующее геометрическое свойство поворота окружности: для любого $\varepsilon>0$ существует множество B и натуральное число h со следующими свойствами: множество B имеет радиус $d(B)<\varepsilon$; множества B, $R_\alpha B$, $R_\alpha^2 B$, …, $R_\alpha^{h-1}B$ дизъюнктны и $\mu\left(\bigcup_{k=0}^{h-1}R_\alpha^k B\right)>1-\varepsilon$.

5. В условиях задачи 6(A) докажите, что $P(N)\le N^3$.

6. Пусть $\boldsymbol{x}_1=(x_1,y_1)$ — периодическая точка для автоморфизма Аносова T_A. Найдите все точки на торе, стремящиеся к $\boldsymbol{x}_1$ под действием T_A^k, $k\to+\infty$. Найдите точки на торе, стремящиеся к $\boldsymbol{x}_1$ под действием T_A^{-k}, $-k\to-\infty$.

Гомоклиническими точками преобразования $\boldsymbol{x}\mapsto T_A\boldsymbol{x}$ называются точки $\boldsymbol{x}$, такие, что $T_A^k\boldsymbol{x}\to 0$ при $k\to+\infty$ и одновременно $A^k\boldsymbol{x}\to 0$ при $k\to-\infty$.

10. Докажите, что гомоклинические точки есть точки взаимного пересечения собственных прямых ℓ_1 и ℓ_2. Докажите, что эти точки всюду плотны на каждой из собственных прямых.

11. Докажите, что множество Ξ гомоклинических точек T_A инвариантно относительно T_A. Верно ли, что Ξ является орбитой T_A, то есть $\Xi=\{T_A^k\xi_0\}$?

Группа C

1. Существуют ли минимальный диффеоморфизм двумерной сферы S^2 ?

2. Существует ли гомеоморфизм двумерного тора, обладающий свойством топологического перемешивания?

3. Предположим, что теперь рассматривается (бесконечно гладкий) диффеоморфизм тора $\mathbb{T}^2$. Может ли наблюдаться топологическое перемешивание в этом слечае?

4. Приведите пример транзитивного гомеоморфизма *не*компактного многообразия.

5. Постройте математическую модель динамической системы, которая описывает движение бильярдного шара радиуса 0 с постоянной скоростью по поверхности горизонтального прямоугольного стола, который при соударении с границей стола отражается по закону: угол соударения равен углу отражения. Будет ли обладать эта система свойствами транзитивности, минимальности или перемешивания?

6. Пусть теперь рассматривается свободное движение двух шариков радиуса r внутри квадрата со стороной a (всё происходит в горизонтальной плоскости). Шарики упруго отражаются от границы области и совершают упругие соударения друг с другом. Обладает ли свойствами минимальности и топологического перемешивания?

7. Докажите, что любая гомоклиническая точка T_A имеет вид

$$\boldsymbol{x} = (\lambda^{m_1} + \dots + \lambda^{m_n})\xi_0.$$

Какие ограничения надо наложить на вектор $(m_1, \dots, m_n)$. Как записать $T_A\boldsymbol{x}$ в этих терминах?

Здесь λ — максимальное собственное значение A.

8. Пусть в условиях предыдущей задачи $a_i = 1$, если $i \in \{m_j\}$, и $a_i = 0$ иначе. Является ли открытым или замкнутым в тихоновской топологии множество всех допустимых последовательностей (a_i) ?

Примечание: Во всех задачах, если не оговорено иное, A обозначает матрицу из задачи 5(A).

Комментарий

Задачи в группе A — домашнее задание.

Задачи повышенной сложности (B и C) позволяют получить бонусные баллы. Для того чтобы решение задачи из групп B и C было учтено, его необходимо записать, отсканировать (сфотографировать) и прислать по адресу `sasha.prihodko@gmail.com` до слудеющего вторника включительно. Задачи группы C, не решённые в течение недели, далее засчитываются первому студенту, приславшему решение.

Просьба сообщать о неточностях и опечатках в условиях.