Динамические системы: Список задач к занятию №4 (*24.09.14*)

Группа A

1. Обоснуйте тот факт, что построенное на лекции разбиение тора $\mathbb{T}^2 = \mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B}$ генерирует марковский процесс.

2. Проверьте изоморфность с точностью до множества меры нуль исходного преобразования T_A процессу Маркова, построенному по разбиению $\mathcal{P} \vee T_A\mathcal{P}$, где $\mathcal{P} = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$.

3. Почему марковский процесс, построенный по разбиению $\mathcal{P}$, не изоморфен T_A ?

4. Пусть $\Gamma = (V, E)$ — конечный ориентированный граф с множеством вершин V и множеством рёбер E. И пусть

$$X = \{(x_i)\colon\ x_i \in V,\ (x_i, x_{i+1}) \in E\},$$
$$Y = \{(e_i)\colon\ e_i \in E,\ r(e_i) = s(e_{i+1})\},$$

где $s(e)$ и $r(e)$ — начальная и конечная вершины соответственно. Проверьте, что как X, так и Y являются замкнутыми множествами. Верно ли, что каждая последовательность (e_i) естественно востанавливается по (x_i) и наоборот?

5. Каким образом в терминах графов охарактеризовать разбиение $\mathcal{P} \vee T_A\mathcal{P}$?

Группа B

1. Для произвольного гиперболического автоморфизма T_A тора, заданного умножением на матрицу A, докажите существование конечного набора прямоугольников Π_k, таких, что

$$\partial_c T_A \Pi_k \subset \bigcup_j \partial_c \Pi_j,$$

где $\partial_c \Pi_k$ обозначает часть границы прямоугольника Π_k, состоящую из отрезков, параллельных сжимающему направлению.

2. Проверьте, что прямоугольники задачи 1 задают разбиение, генерирующее марковский процесс.

3. Пусть $\hat{A}\colon\ f(\boldsymbol{x}) \mapsto f(A\boldsymbol{x})$ — так называемое *преобразование Купмана*, ассоциированное с автоморфизмом T_A. Оно действует на функции $f\colon\ \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$. Докажите, что $\hat{A}$ переводит характер $\chi_{j_1,j_2}(x, y) = e^{2\pi i\,(j_1 x + j_2 y)}$ группы $\mathbb{T}^2$ в некоторый другой характер. Как утроено действие $\hat{A}$ на множестве характеров $\{\chi_{j_1,j_2}\}$?

4. Применяя результат задачи 3, а именно, переходя к рядам Фурье по системе характеров $e^{2\pi i(j_1 x + j_2 y)}$, вычислите $\hat{A}f$ для функций:
а) $f(x, y) = \cos 2\pi x \cos 2\pi y$
б) $f(x, y) = \cos 6\pi y - \sin^3 2\pi x$

5. Сколько орбит на множестве характеров имеет оператор $\hat{A}$? Зависит ли ответ от матрицы A ?

6. Докажите, что марковский процесс, построенный в задаче 2(A), является топологически перемешивающим относительно тихоновской топологии на пространстве допустимых последовательностей.

7. Оцените скорость роста числа допустимых слов длины ℓ для этой марковской цепи.

Группа C

1 (*продолжение задачи 7(A) задания №3*). Верно ли аналогичное утверждение о существовании области, которую ограничивает заданная ломаная, если сумма углов ломаной равна 2π ?

2 (*продолжение задачи 7(B) задания №3*). Как утроены допустимые наборы $(m_1, \dots, m_2)$, кодирующие гомоклинические точки автоморфизма Аносова, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

3. Используя результат задачи 3(B), докажите, что

$$\int_{\mathbb{T}^2} f(A^n \boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x}) \, dx \, dy \to \int_{\mathbb{T}^2} f(\boldsymbol{x}) \, dx \cdot \int_{\mathbb{T}^2} g(\boldsymbol{x}) \, dx, \qquad n \to \infty,$$

где

$$f(x, y) = x(1 - x), \qquad g(x, y) = y(1 - y), \qquad \boldsymbol{x} = (x, y) \in \mathbb{T}^2.$$