Динамические системы: Список задач к занятию №5 (*1.10.14*)

Группа А

1. Пусть $Y \subset \Sigma_2$ — пространство последовательностей y, таких, что следующие *запрещённые слова* не могут встречаться в качестве подслов y:

$$11, \qquad 1001, \qquad 10100.$$

Докажите, что сдвиг на Y топологически сопряжён некоторой цепи Маркова.

*Что можно сказать о существовании метрического изомофизма между этими системами?

2. Вычислите отображение Пуанкаре, соответствующее возвращению на кривую заданную уравнением $2x - 3y = 0$, для потока на двумерном торе, заданного постоянным векторным полем $\dot{x} = \alpha$, $\dot{y} = 1$.

3. В условиях задачи 1 вычислите отображение Пуанкаре, соответствующее кривой, заданной графиком функции $y = \varepsilon \sin 2\pi x$.

4. Будет ли обладать свойством топологического перемешивания следующий поток на единичном квадрате $\simeq \mathbb{T} \times [0,1]$? Точка (x, y) движется в вертикальном направлении со скоростью $\dot{y} = (1 + \varepsilon \sin 2\pi(x+\alpha) - \varepsilon \sin 2\pi x)^{-1}$, а при достижении верхней границы $\mathbb{T} \times \{1\}$ точка $(x, 1)$ "перепрыгивает" в точку $(x+\alpha, 0)$. Какому из известных многообразий окажется гомеоморфным наше фазовое пространство, если задать эквивалентность $(x, 1) \sim (x + \alpha, 0)$?

5. Рассмотрим *преобразование Гаусса* на полуинтервале $[0, 1)$:

$$h(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Как действует отображение h в терминах разложения в непрерывные дроби:

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots}}}} \quad ?$$

Исследуйте различные динамические свойства отображения h.

Задачи на повторение

11. Постройте разбиение $\mathcal{P}_0$ на фундаментальные параллелограммы и затем марковское кодирование автоморфизма Аносова, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно ли взять в качестве разбиения, генерирующего марковское кодирование, разбиение $\mathcal{P}_0$?

Внимание!
На решение задач групп B и C теперь отводится 2 недели.

Группа B

1. Рассмотрим следующие два свойства гомеоморфизма $f\colon\ X \to X$:

(1) полуорбита $\mathcal{O}_+(x) = \{f^j(x)\colon\ j \geq 0\}$ некоторой точки x плотна в фазовом пространстве X (*топологическая транзитивность*);

(2) для любой пары непустых открытых U и V существует $n \geq 0$, такое, что $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$.

а) Верно ли, что (1) $\Rightarrow$ (2) ?

б) Верно ли, что (2) $\Rightarrow$ (1) ?

2. Рассмотрим комплексно-аналитическое преобразование сферы Римана $f\colon\ \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$, такое, что дифференциал $Df \neq 0$. Докажите, что тогда f является дробно-линейным преобразованием:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

3. Существует ли топологически транзитивное преобразвоание среди отображений, рассмотренных в задаче 2(B)?

4. Является ли автоморфизм Аносова T_A топологически сопряженным некоторму сдвигу на торе S, то есть существует ли гомеоформизм $\phi\colon\ \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, такой, что $\phi T_A \phi^{-1} = S$?

5. Являются ли топологически сопряжёнными следующие динамические системы?

1) сдвиг на множестве двусторонних последовательность над алфавитом $\mathbb{A} = \{0,1,2,3\}$ с запрещёнными словами 21, 13, 32;

1) цепь Маркова, заданная графом с вершинами $V = \{a,b,c,d,e,f,d',e',f'\}$ и рёбрами $E = \{ab, bc, ca, ad, be, cf, d'b, e'c, f'a\}$.

Группа C

1. Рассмотрим преобразование Фарея на отрезке $[0,1]$:

$$f\colon\ x \mapsto \begin{cases} f_1(x) = \dfrac{x}{1-x}, x \in [0, \dfrac{1}{2}], \\ f_0(x) = \dfrac{1-x}{x}, x \in [\dfrac{1}{2}, 0] \end{cases}$$

а) Найдите неподвижные точки преобразования f.

б) Докажите, что полуорбита $\mathcal{O}_+(x) = \{f^j(x)\colon\ j \geq 0\}$ почти каждой точки $x \in [0,1]$ всюду плотна в $[0,1]$.

в) Рассмотрим разбиение $\mathcal{P} = \{[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1]\}$, где первое множество отмечено символом “1”, а второе символом “0”. Какие конечные коды (слова в алфавите $\{1,0\}$) могут встречаться в последовательности (x_i), кодирующей орбиту точки x ?

г) Опишите периодические точки f, а также точки x, такие, что $\exists \lim_{k\to\infty} f^k(x)$.

2. В условиях задачи 3 опишите разбиение $\mathcal{P} \vee f\mathcal{P} \vee \ldots \vee f^{n-1}\mathcal{P}$.

Комментарий

Срок сдачи решений задач из групп B и C увеличен, и составляет теперь 2 недели.

По истечении двух недель задача группы C засчитывается первому студенту, приславшему решение.