Динамические системы: Список задач к занятию №6 (*8.10.14*)

Группа А

На очередном занятии мы продолжим разбирать задачи 4 и 5 из задания №5

1. Докажите, что преобразование $T\colon\ x_0 \to x = x(x_0)$, определяемое уравнением

$$x - x_0 = \alpha\big(1 + \epsilon\cdot(\sin 2\pi x - \sin 2\pi x_0)\big),$$

топологически сопряжено некоторому повороту окружности $R_{\alpha'}$. Каким может быть значение α' ?

Пусть (M, ω) — симплектическое многообразие и H — гладкая функция на M. *Гамильтоново векторное полем*, связанное с функцией H, определяется как

$$v_H^i = \omega^{ij}(dH)_j.$$

2. Представьте в форме гамильтоновой динамической системы уравнение $\ddot{x} + \sin x = 0$. Вычислите полную энергию системы $H(x, p)$. Проверьте (при помощи непосредственного вычисления), что H является инвариантом относительно потока, порождённого гамильтоновым векторным полем v_H.

3. Докажите, что <u>линейное</u> преобразование $f\colon\ \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ симплектического пространства, сохраняющее стандартную симплектическую форму

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n$$

сохраняет также объём в $\mathbb{R}^{2n}$.

4. Проверьте, что фазовый поток, порождённый гамильтоновым векторным полем v_H, сохраняет симплектическую форму ω и, в частности, фазовый объём (*при исследовании фазового потока достаточно рассмотреть $M = \mathbb{R}^{2n}$ со стандартной симплектической структурой*).

5 (= 1(B) списка №2). Рассмотрим дифференциальное уравнение, задающее малые колебания относительно невырожденного квадратичного потенциального поля на плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$\ddot{X} = -\operatorname{grad} V(X),$$

где

$$V(X) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \qquad X = (x, y),$$

причём форма $V(x)$ положительно определена. Найдите замыкание кривой $\gamma = (x(t), y(t))$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, вдоль которой движется наша точка, при условии, что в момент времени $t = 0$ система находилась в точке (x_0, y_0) и имела нулевоую скорость.

Исследуйте случаи:

а) $V(X) = \omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2$;
б) $V(X) = 2x^2 + xy + 2y^2$;
в) $V(X) = 3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2$.

Группа B

1. Каким будет ответ в задаче 2(A), если исключить требование линейности f ?

Симпликтическая форма ω при этом по-прежнему понимается как невырожденная антисимметрическая линейная 2-форма.

Скобкой Пуассона функций f и g называется выражение $\{f, g\} = \omega(df, dg)$, где ω — симплектическая форма на многообразии M размерности $2n$.

Пусть v — гладкое векторное поле на многообразии M. *Производной Ли* тензора (в частности, функции, векторного поля...) $A(x)$, $x \in M$, по векторному полю v называется тензор

$$\mathscr{L}_v A = \frac{d}{dt} A(g^t x)\bigg|_{t=0},$$

где g^t — фазовый поток, порождённый вектоным полем v. Иными словами, если $x(t)$ — решение дифференциального уравнения $\dot{x} = v$ с начальным условием $x(0) = x_0$, то $\mathscr{L}_v A(x_0) = \frac{d}{dt} A(x(t))|_{t=0}$.

2. Получите явную формулу для скобки Пуассона $\{f, g\}$ относительно станндартной симплектической формы в $\mathbb{R}^{2n}$.

3. Докажите, что для любых гладких векторных полей u и v существует поле, обозначаемое $[u, v]$, такое, что $\mathscr{L}_{[u,v]} = \mathscr{L}_u \mathscr{L}_v - \mathscr{L}_v \mathscr{L}_u$. Здесь $\mathscr{L}_u \mathscr{L}_v$ обозначает произведение, то есть композицию операторов $\mathscr{L}_u \circ \mathscr{L}_v$.

4. Проверьте, что $\{f, g\} = \mathscr{L}_{v_g} f$.

5. Докажите тождество Якоби: $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$.

6. Выведите из задачи 6 следующую формулу: $v_{f,g} = -[v_f, v_g]$.

7. Пусть $\Pi_{\boldsymbol{x}}$ — гладкое семейство (поле) плоскостей, приложенных в точке $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. Иными словами, можно считать, что плоскость $\Pi_{\boldsymbol{x}}$ задана нормалью $\nu(\boldsymbol{x})$, причём $\nu(\boldsymbol{x})$ — гладкая функция и $\nu(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

8. Докажите следующий вариант теоремы Нётер: Если функция H инвариантна по отношению к потоку g^t, порождённому некоторым гамильтоновым векторным полем v_f, то f, в свою очередь, инвариантна по отношению к полю v_H.

Группа C

1. Докажите, что любая гладкая 1-форма β на $\mathbb{R}^3$, $d\beta \neq 0$, может быть локально, путём замены координат, приведена к виду $\tilde{\beta} = dy - z\,dx$. *Сравните полученный результат с задачей* 3(B).

2. Докажите, что существует поток g^t на некотором симплектическом многообразии (M, ω), сохраняющий симплектическую форму ω, но *не* порождаемый никаким гамильтонианом H.

3. Установите, что $\Omega = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ (n раз) является формой объёма на многообразии M, если ω — симплектическая форма.