Задачи по курсу случайных графов. Часть 3

1. Пусть $p \sim c \cdot n^{-k/(k-1)}$, а X_k — это число деревьев размера k в $G(n,p)$. Докажите, что тогда $X_k \xrightarrow{d} Pois(\lambda)$ при $n \to \infty$, где $\lambda = \frac{c^{k-1}k^{k-2}}{k!}$.

2. Оказывается, что при $p = c/n$, $c > 0, c \neq 1$, размер максимальной древесной компоненты в $G(n,p)$ имеет порядок $\ln n$.

   а) Докажите, что существует такая константа $\gamma = \gamma(c)$, что $\mathsf{P}(T_k > 0) \to 1$, где $k \geqslant \gamma \cdot \ln n$, а T_k — число древесных компонент размера k в $G(n,p)$.

   б) Обозначим через $L^{(t)}$ — размер максимальной древесной компоненты в $G(n,p)$. Вычислите такую $\gamma = \gamma(c)$, что

$$\frac{L^{(t)}}{\ln n} \xrightarrow{\mathsf{P}} \gamma.$$

3. Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с законом размножения частиц ξ. Положим $Y_n = X_n + \ldots + X_0$. Докажите, что имеют место следующие рекуррентные соотношения для производящих функций:

$$\varphi_{X_n}(z) = \varphi_\xi(\varphi_{X_{n-1}}(z)),$$

$$\varphi_{Y_n}(z) = z\varphi_\xi(\varphi_{Y_{n-1}}(z)).$$

4. Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с законом размножения частиц ξ. Положим $Y_n = X_n + \ldots + X_0$. Докажите, что для любого $z \in [0,1)$

$$\varphi_{Y_n}(z) < \varphi_{Y_{n-1}}(z).$$

   Тем самым существует предел $\rho(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(z)$ — производящая функция общего числа частиц в ветвящемся процессе. Докажите, что для любого $z \in [0,1]$ эта функция удовлетворяет соотношению:

$$\rho(z) = z\varphi_\xi(\rho(z)).$$

   Чему равны $\rho(1)$ и $\rho(0)$?

   Замечание. *Если Y — это общее число частиц в ветвящемся процессе, то*

$$\rho(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k \mathsf{P}(Y = k) = \mathsf{E}(z^Y | Y < \infty).$$

5. Пусть $np \to c$, $c > 1$. Докажите, что с вероятностью, стремящейся к 1, гигантская компонента является единственной сложной компонентой в случайном графе $G(n, p)$.

6. Пусть $c_1(n) \to 0$ — положительная функция, причем $c_1(n)n^{\frac{4}{15}} \to +\infty$. Пусть также $c_2(n) - c_1(n) \sim \beta\sqrt{2\pi}(c_1(n))^{5/2}$ для фиксированного $\beta > 0$. Обозначим через X_n — число древесных компонент случайного графа $G(\lambda)$ размера от $c_1(n)n^{2/3}$ до $c_2(n)n^{2/3}$. Докажите, что $X_n \xrightarrow{d} Pois(\beta)$.

7. Докажите, что в модели $G(\lambda)$ максимальный размер древесной компоненты имеет порядок $\Omega_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$, т.е. для любой $w(n) \to 0$ в случайном графе найдется древесная компонента размера не меньше $n^{2/3}w(n)$.

8. Пусть $np = w(n) \to +\infty$ при $n \to \infty$. Докажите, что с вероятностью, стремящейся к 1, в случайном графе $G(n, p)$ не будет унициклических компонент.

СРОК СДАЧИ среда, 26 ноября.