

## Задачи по курсу случайных графов. Часть 4

1. Докажите, что для любого графа  $G$  свойство  $L_G$  является свойством первого порядка.
2. С помощью теоремы Спенсера и Шела докажите, что закон нуля или единицы для  $G(N, p)$  выполнен, если  $p = 1 - n^{-\alpha}$ , где  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .
3. Докажите, что если  $p = n^{-\alpha}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 3$ ,  $\alpha \in (0, 1/(k-1))$ , то случайный граф  $G(n, p)$  подчиняется  $k$ -закону нуля или единицы.
4. Докажите теорему о количестве максимальных сбалансированных графов.

**Теорема 1.** Пусть  $G$  — сбалансированный граф с плотностью, меньшей  $1/\alpha$ , пара  $(K, T)$  является  $\alpha$ -жесткой. Тогда с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l$  выполнено

$$N_G^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l) \sim N_G(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l) \sim \mathbb{E}N_G^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l) = \Theta\left(n^{v(G) - \alpha e(G)}\right).$$

5. Докажите, что случайный граф  $G(n, p)$ 
  - а) не подчиняется закону нуля или единицы при  $p = n^{-(1+1/l)}$  для любого  $l \in \mathbb{N}$ ;
  - б) подчиняется закону нуля или единицы при  $p \ll n^{-2}$ ;
  - в) не подчиняется  $2k$ -закону нуля или единицы при  $p = n^{-2/k}$ .

**СРОК СДАЧИ** понедельник, 15 декабря.