Программа курса
«Случайные графы I»

лекторы — М. Е. Жуковский, Д. А. Шабанов

кафедра дискретной математики ФИВТ,
магистратура 9 семестр

1. Модели случайных графов. Классические модели: биномиальная и равномерная. Другие модели случайных графов: случайные регулярные графы, случайные подграфы неполных графов. Графовые случайные процессы.

2. Теория случайных подмножеств, биномиальная и равномерная модели. Монотонные свойства конечных подмножеств. Лемма о монотонности вероятности обладания монотонным свойством для случайного подмножества.

3. Асимптотическая эквивалентность моделей $\Gamma(p)$ и $\Gamma(m)$: одинаковое асимптотическое поведение вероятности обладания монотонным свойством для случайных подмножеств в этих моделях.

4. Пороговые вероятности обладания монотонными свойствами случайным подмножеством. Критерий того, что данная функция является пороговой вероятностью для монотонного свойства Q. Теорема о существовании пороговой вероятности для произвольного монотонного свойства случайных подмножеств. Определение точной пороговой вероятности для монотонного свойства, примеры.

5. Малые подграфы в случайном графе $G(n,p)$. Функция $m(G)$, сбалансированные и строго сбалансированные графы, примеры. Леммы о среднем количестве и дисперсии числа подграфов случайного графа $G(n,p)$, изоморфных данному фиксированному графу G. Методы первого и второго моментов. Теорема о пороговой вероятности появления подграфа случайного графа $G(n,p)$, изоморфного данному фиксированному графу G.

6. Метод моментов. Достаточное условие того, что случайная величина однозначно определяется своими моментами. Примеры таких случайных величин. Плотность и относительная компактность семейства вероятностных мер в метрическом пространстве. Теорема Прохорова (б/д). Равномерная интегрируемость семейства случайных величин. Доказательство метода моментов. Многомерный метод моментов (б/д).

7. Пуассоновская предельная теорема для числа подграфов случайного графа $G(n,p)$, изоморфных данному фиксированному строго сбалансированному графу G, в условиях $np^{m(G)} \to c > 0$. Многомерное обобщение пуассоновской предельной теоремы, примеры ее применения.

8. Центральная предельная теорема для числа подграфов случайного графа $G(n,p)$, изоморфных данному фиксированному графу G, в условиях $np^{m(G)} \to +\infty$.

9. Эволюция случайного графа $G(n,p)$. Случай $np \to 0$: максимальный размер и структура компонент связности.

10. Эволюция случайного графа $G(n,p)$. Случай $np = c \in (0,1)$: максимальный размер компонент связности и отсутствие сложных компонент. Оценка вероятности большого уклонения биномиальной случайной величины от своего среднего значения (неравенство Чернова).

11. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона. Уравнение для нахождения вероятности вырождения. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса (б/д).

12. Эволюция случайного графа $G(n,p)$. Случай $np = c > 1$. Теорема о размере максимальной связной компоненты случайного графа. Центральная предельная теорема для размера максимальной связной компоненты (б/д).

13. Числа $C(k, k+l)$. Лемма о количестве лесов с k компонентами на множестве из n вершин с помеченными корнями деревьев. Нахождение точного значения $C(n,n)$. Теоремы Райта и Боллобаша об оценках величины $C(k, k+l)$ (б/д).

14. Эволюция случайного графа $G(n,p)$. Случай $np \to c \neq 1$. Теорема о среднем значении и дисперсии общего числа вершин в унициклических компонентах.

15. Эволюция случайного графа $G(n,p)$. Случай $np = 1 + \lambda n^{-1/3}$. Лемма о среднем значении числа l-компонент на k вершинах. Лемма о среднем количестве общего числа вершин в древесных и унициклических компонентах. Максимальный размер унициклических и сложных компонент. Асимптотический порядок размера максимальной древесной компоненты случайного графа.

16. Эволюция случайного графа $G(n,p)$. Случай $np = 1 + \lambda n^{-1/3}$. Лемма об отсутствии сложных компонент маленького размера. Ограниченность (по вероятности) максимальной сложности компоненты в случайном графе. Следствие: количество, размер и сложность сложных компонент.

17. Закон нуля или единицы для случайного графа $G(n,p)$. Оценки количества расширений к малым подграфам в случайном графе $G(n,p)$. Теорема Спенсера – Шелаха о законе нуля или единицы при $p = n^{-\alpha}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Список литературы

[1] B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[2] S. Jansen, T. Łuczak, A. Rucinski, *Random graphs*, Wiley-Interscience, New York, 2000.

[3] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.

[4] T. Łuczak, B. Pittel, J. Wierman, "The structure of a random graph at the point of phase transition", *Transactions of the American Mathematical Society*, **341**:2 (1994), 721–748.

[5] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, Физматлит, М., 2000.