Московский физико-технический институт
Лекторий
Математическая логика
Задачи к лекции 1: формальный язык записи логических утверждений

1. Докажите, что если $a \cdot b = a$, то $b = \varepsilon$.

2. Докажите, что если $a \cdot b = b \cdot a$, то существует слово c и числа k и n, что $a = c^k$, $b = c^n$.

Указание: Используйте идею алгоритма Евклида.

3. Докажите, что для любого L верно $L \cdot \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\} \cdot L = L$ и $L \cdot \varnothing = \varnothing \cdot L = \varnothing$. Верно ли, что если $L \cdot M = L$, то $M = \{\varepsilon\}$?

Указание: В последнем вопросе рассмотрите $L = \{0, 1\}^*$.

4. Чему равняется $\{a, bb, ba\}^*$?

Ответ: Все слова, кроме заканчивающихся на нечётное количество букв b.

5. В формулах вместо скобок стали писать модули (т.е. открывающие и закрывающие скобки стали обозначать одним и тем же символом $|$). Определите такие формулы формально (например, для операций сложения и вычитания). Сохранилась ли при этом однозначность разбора?

Решение: формулы определяются так: любая переменная является формулой; если φ и ψ являются формулами, то $|\varphi - \psi|$ и $|\varphi + \psi|$ также являются формулами.

Опыт обращения с выражениями с модулями говорит, что разбор однозначный. Формально это можно доказать несколькими способами. Во-первых, можно восстановить, какие модули открывающие, а какие закрывающие. Дело в том, что после открывающего модуля идёт цепочка других (открывающих) модулей и переменная, а после закрывающего — цепочка (закрывающих) модулей и символ операции или конец формулы. Само это утверждение легко доказывается по индукции: если оно верно для φ и ψ, то также верно для $|\varphi - \psi|$ и $|\varphi + \psi|$.

Во-вторых, можно провести непосредственное рассуждение по индукции, выделив элементарную подформулу и заменив её на новую переменную. Нужно рассмотреть первую позицию в выражении, где после знака модуля идёт переменная: $||\ldots|x$. Дальше обязательно должен быть знак операции, переменная и закрывающий модуль: $||\ldots|x * y|$. Теперь нужно заменить $|x * y|$ на новую переменную z, получить более короткое выражение, и применить к нему предположение индукции.

В-третьих, можно провести рассуждение с аналогом скобочного итога. Рассмотрим «модульный итог» выражения, в который каждый символ $|$ даёт вклад 1, а символы операций — вклад -1. Тогда модульный итог всей формулы равен числу символов операций, а итог любого собственного префикса, заканчивающегося модулем, больше числа символов операций в этом префиксе. Дальнейшее рассуждение аналогично доказательству стандартной теоремы об однозначночти разбора.

6. Сохранится ли однозначность разбора в выражениях с модулями, если:

а) Вместо символов операций писать тоже модули;

б) Символы операций вообще не писать?

Указание: обобщите второе и третье доказательства из предыдущей задачи.

7. В пропозициональных формулах перестали писать закрывающие скобки. Сохранилась ли при этом однозначность разбора?

Указание: предложите алгоритм, восстанавливающий закрывающие скобки.

8. Пропозициональные формулы стали писать вообще без скобок. Сохранилась ли при этом однозначность разбора?

Ответ: конечно, нет.

9. Пропозициональные формулы стали писать в польской записи: $\neg\varphi$, $\wedge\varphi\psi$, $\vee\varphi\psi$, $\to\varphi\psi$. Сохранилась ли при этом однозначность разбора?

Решение: эта задача также решается при помощи аналога скобочного итога. Сначала разберём случай, когда отрицаний нет, а есть только бинарные операции. В этом случае знак операции даёт вклад -1, а переменная — вклад $+1$. Итог всей формулы равен 1, а итог любого её собственного префикса меньше 1. Далее однозначность получается стандартным образом. Если в формуле есть отрицания, то им нужно сопоставить вклад 0. Если формула начинается не с отрицания, то рассуждение аналогично, а если с отрицания, то она получена из всего последующего выражения.

10. Пропозициональные формулы стали писать в обратной польской записи: $\varphi\neg$, $\varphi\psi\wedge$, $\varphi\psi\vee$, $\varphi\psi\to$. Сохранилась ли при этом однозначность разбора?