

Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2015
Семинар 1: язык записи формальных утверждений

Алфавитом называется любое конечное множество. Элементы алфавита называются *символами*. Последовательности (кортежи) элементов алфавита называются *словами*. *Языком* называется любое множество слов.

Пустым словом называется слово, не содержащее ни одной буквы. Пустое слово обозначается ε . Над словами можно определить операцию *конкатенации* (примисывания одного к другому). Конкатенацию слов a и b будем обозначать как $a \cdot b$ или ab . Также можно определить *обращение* x^R слова x , т.е. слово x , записанное в обратном порядке.

1. Докажите, что:

а) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

б) $a \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot a = a$;

в) $(a \cdot b)^R = b^R \cdot a^R$.

2. Докажите, что если $a \cdot b = a$, то $b = \varepsilon$.

3. Докажите, что если $a \cdot b = b \cdot a$, то существует слово c и числа k и n , что $a = c^k$, $b = c^n$.

Конкатенацией языков L и M называется язык $L \cdot M = \{x \cdot y \mid x \in L \text{ и } y \in M\}$.

4. Докажите, что для любого L верно $L \cdot \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\} \cdot L = L$ и $L \cdot \emptyset = \emptyset \cdot L = \emptyset$. Верно ли, что если $L \cdot M = L$, то $M = \{\varepsilon\}$?

Итерацией (звездой Клини) языка L называется язык $L^* = \{\varepsilon\} \cup L \cup L^2 \cup \dots$. *Плюсом Клини* для языка L называется язык $L^+ = L \cup L^2 \cup L^3 \cup \dots$.

5. Докажите, что:

а) $L^* = L^+ \cup \{\varepsilon\}$;

б) $L^+ = L \cdot L^*$;

в) $(L^*)^* = L^*$, $(L^+)^+ = L^+$;

г) $\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}^+ = \{\varepsilon\}$, $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$, $\emptyset^+ = \emptyset$.

6. Чему равняется $\{a, bb, ba\}^*$?

Пусть дано слово в некотором алфавите, содержащем открывающие и закрывающие скобки. *Скобочным итогом* этого слова назовём разность числа открывающих скобок и числа закрывающих. *Правильной скобочной последовательностью* называется последовательность открывающих и закрывающих скобок, такая что у любого начала последовательности скобочный итог неотрицательный, а у всей последовательности — нулевой.

7. Дадим следующее определение S -последовательности:

- а) Пустая последовательность ε является S -последовательностью;
- б) Если σ является S -последовательностью, то (σ) также является S -последовательностью;
- в) Если σ_1 и σ_2 являются S -последовательностями, то $\sigma_1\sigma_2$ также является S -последовательностью.

Докажите, что любая S -последовательность является правильной скобочной, и наоборот.

8. Пусть τ является S -последовательностью. Всегда ли можно однозначно сказать, по какому из трёх правил она получена?

9. Пусть τ является S -последовательностью, полученной по второму правилу. Всегда ли можно однозначно указать σ , из которой получена τ ?

10. Пусть τ является S -последовательностью, полученной по третьему правилу. Всегда ли можно однозначно указать σ_1 и σ_2 , из которых получена τ ?

Деревом синтаксического разбора слова a называется направленное дерево, в каждой вершине которого записано некоторое слово, при этом в корне стоит слово a , а в потомках каждой вершины — слова, из которых образовано слово, стоящее в этой вершине.

11. Нарисуйте все возможные деревья синтаксического разбора для последовательности $()(())(())(())$ (исключив конкатенацию с пустым словом).

12. Дадим следующее определение T -последовательности:

- а) Пустая последовательность ε является T -последовательностью;
- б) Если σ_1 и σ_2 являются T -последовательностями, то $(\sigma_1\sigma_2)$ также является T -последовательностью.

Докажите, что любая T -последовательность является правильной скобочной, но обратное неверно.

13. Докажите, что скобочный итог любого начала T -последовательности, отличного от ε и всей последовательности, положительный.

14. Пусть τ является T -последовательностью, полученной по второму правилу. Всегда ли можно однозначно указать σ_1 и σ_2 , из которых получена τ ? Всегда ли у T -последовательности единственное дерево синтаксического разбора?

Назовём *пропозициональными переменными* символы p_1, p_2, \dots . Если p — пропозициональная переменная, то она также является пропозициональной формулой. Если φ — пропозициональная формула, то $\neg\varphi$ — также пропозициональная формула. Если φ и ψ — пропозициональные формулы, то $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ и $(\varphi \rightarrow \psi)$ — также пропозициональные формулы.

15. Нарисуйте деревья синтаксического разбора для формул

- а) $(\neg(p \rightarrow (p \wedge q)) \rightarrow (p \vee r))$;
- б) $((p \wedge (q \vee \neg p)) \wedge ((\neg q \rightarrow p) \vee q))$;

в) $((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (r \wedge \neg p)))$.

16. Докажите лемму о скобочном итоге для пропозициональных формул: если τ — пропозициональная формула, а σ — её начало, то скобочный итог σ неотрицателен, причём он равен нулю только если $\sigma = \neg\neg\dots\neg$ (последовательность символов \neg , возможно пустая) или если $\sigma = \tau$.

17. Докажите теорему об однозначности разбора: если τ — пропозициональная формула, то она построена ровно по одному правилу единственным образом.

18. В пропозициональных формулах вместо скобок стали писать модули (т.е. открывающие и закрывающие скобки стали обозначать одним и тем же символом $|$). Сохранилась ли при этом однозначность разбора?

19. В пропозициональных формулах перестали писать закрывающие скобки. Сохранилась ли при этом однозначность разбора?

20. Пропозициональные формулы стали писать вообще без скобок. Сохранилась ли при этом однозначность разбора?

21. Пропозициональные формулы стали писать в польской записи: $\neg\varphi$, $\wedge\varphi\psi$, $\vee\varphi\psi$, $\rightarrow\varphi\psi$. Сохранилась ли при этом однозначность разбора?

22. Пропозициональные формулы стали писать в обратной польской записи: $\varphi\neg$, $\varphi\psi\wedge$, $\varphi\psi\vee$, $\varphi\psi\rightarrow$. Сохранилась ли при этом однозначность разбора?

23. В задачах 18–22 дайте полные определения обсуждаемых формул.