Вопросы по курсу "Теория Вероятностей"

лектор - к.ф.-м.н. М.Е. Жуковский

осенний семестр 2015

1. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Аксиомы Колмогорова.

2. Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры. Геометрические вероятности. Примеры.

3. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Примеры.

4. Теорема о непрерывности в “нуле” вероятностной меры.

5. Системы событий: алгебры, σ-алгебры. Наименьшая алгебра (σ-алгебра), порожденная системой множеств. Борелевские σ-алгебры в $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$. Независимость событий и систем событий. Пример Бернштейна.

6. Вероятностные меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Функция распределения вероятностной меры, ее свойства. Примеры. Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ по функции распределения (б/д).

7. Вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Многомерная функция распределения, ее свойства. Примеры. Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ по функции распределения (б/д).

8. Измеримые отображения. Случайные величины и векторы. Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах. Примеры.

9. Действия над случайными величинами, пределы последовательностей из случайных величин.

10. Характеристики случайной величины (вектора): распределение вероятностей, функция распределения. Абсолютно непрерывные и дискретные распределения. Плотность. Примеры.

11. Совместное распределение конечного набора случайных величин. Независимость случайных величин. Независимость дискретных случайных величин. Независимость произвольного набора случайных величин. Свертка распределений. Примеры (дискретный и абсолютно непрерывный случай).

12. Критерий независимости, теорема о независимости борелевских функций от непересекающихся наборов независимых случайных величин.

13. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Свойства. Примеры.

14. Математическое ожидание абсолютно непрерывной случайной величины. Примеры.

15. Теорема о приближении случайной величины простыми. Определение математического ожидания в общем случае. Корректность определения.

16. Основные свойства математического ожидания.

17. Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин (б/д). Теорема о замене переменных под интегралом Лебега. Примеры.

18. Теорема о монотонной сходимости (без доказательства). Лемма Фату. Теорема Лебега о мажорированной сходимости.

19. Дисперсия, ковариация и их свойства. Примеры. Неравенство Коши – Буняковского. Дисперсия суммы независимых случайных величин.

20. Неравенство Маркова. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Неравенство Йенсена.

21. Виды сходимости случайных величин (почти наверное, по вероятности, в пространстве L^p, по распределению), их взаимосвязи.

22. Виды сходимости случайных величин. Критерий сходимости по распределению (б/д). Критерий Коши сходимости с вероятностью 1. Критерий Коши сходимости по вероятности.

23. Лемма Бореля – Кантелли. Примеры использования. Случайное блуждание. Закон повторного логарифма (б/д).

24. Случайное блуждание. Траектории случайных блужданий. Закон отражения. Закон повторного логарифма (б/д).

25. Неравенство Колмогорова. Теорема о сходимости почти наверное ряда из случайных величин.

26. Усиленный закон больших чисел для независимых случайных величин с ограниченными дисперсиями.

27. Усиленный закон больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин с ограниченным математическим ожиданием.

28. Вероятности больших уклонений (скорость сходимости в законе больших чисел).

29. Характеристические функции случайных величин и векторов. Примеры.

30. Основные свойства характеристических функций случайных величин (первые 4 с доказательством).

31. Формула обращения (б/д). Независимость компонент случайного вектора в терминах характеристических функций. Теорема единственности для характеристических функций (б/д). Теорема непрерывности для характеристических функций (б/д).

32. Проверка, является ли функция характеристической. Теорема Бохнера–Хинчина (доказательство только в одну сторону). Теорема Пойа (схема доказательства). Теорема Марцинкевича (доказательство для простого случая). Примеры.

33. Гауссовские векторы. Три эквивалентных определения гауссовских векторов.

34. Гауссовские векторы. Критерий независимости компонент гауссовского вектора.

35. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин.

36. Схема испытаний Бернулли. Локальная предельная теорема.

37. Схема испытаний Бернулли. Интегральная предельная теорема (б/д). Теорема Пуассона.