Московский физико-технический институт (ГУ)

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: СПИСОК ЗАДАЧ К ЗАНЯТИЮ №2 (*16.09.15*)

Группа A

1. Проверьте, что преобразование поворота окружности R_α является непрерывным относительно естественной метрики (естественной топологии) на окружности, а также сохраняет меру Лебега.

2. Докажите, что константы — единственные инвариантные функции R_α в случае иррационального α, а значит, поворот окружности является эргодическим.

3. Запишите в терминах координат x, y на квадрате $[0,1)^2$, как действуют преобразования: T^2 и T^{-1}, где T — преобразование Пекаря.

4. Проверьте, что квадрат $[0,1]^2$ изоморфен отрезку $[0,1]$ как пространство с мерой.

5. Покажите, что точки множества Кантора K можно индексировать бинарными последовательностями. Проверьте, что K нигде не плотно и имеет меру нуль. Вычислите $K+K$.

6. Докажите, что если T эргодично, то для любого h найдётся башня Рохлина высоты h, имеющая положительную меру.

7. Можно ли в формулировке леммы Рохлина–Халмоша исключить ε? Существует ли T, такое, что для некоторого h невозможно представление

$$X = B \sqcup TB \sqcup \dots \sqcup T^{h-1}B\ ?$$

8 (*теорема Альперна*). Установите, что для любых взаимно простых p и q, $(p,q)=1$, существует (точное) разбиение фазового пространства на две башни высот p и q.

9. Докажите, что из любого накрытия отрезка $[0,1]$ интервалами можно выбрать дизъюнктное подпокрытие, накрывающее хотя бы половину отрезка.

10. В каких случаях эргодичен биллиард в круге?

Группа B

1. Рассмотрим группу G, порождённую парой преобразований R_α и R_β. Каким может быть алгебраический тип этой группы? При каких (α,β) это действие эргодично? При каком условии орбиты действия всюду плотны?

2. Рассмотрим преобразование сдвига на торе $\mathbb{T}^2$, заданное формулой

$$R_{(\alpha,\beta)}\colon\ (x,y)\to(x+\alpha, y+\beta) \pmod 1.$$

Когда данное преобразование является эргодическим? В ситуации *не*эргодичности опишите пространство инвариантных функций.

Указание: используйте спектральную интерпретацию эргодичности.

3. Рассмотрим преобразование отрезка $[0,1]$ с мерой Лебега, заданное следующим правилом:

$$f(x) = \frac{1}{2} + x, \quad \text{если} \quad x \leq \frac{1}{2}$$
$$f(x) = \frac{1}{4} + x, \quad \text{если} \quad \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4}$$
$$f(x) = \frac{1}{8} + x, \quad \text{если} \quad \frac{3}{4} < x \leq \frac{7}{8}$$
$$\dots$$

Запишите, как действует это преобразование в терминах двоичной записи числа x ? Является ли оно обратимым как преобразование пространства с мерой? Докажите эргодичность данного преобразования.

4. Докажите усиленный вариант теоремы Альперна в следующей формулировке: для любого взаимно простого набора высот $(h_1, \dots, h_m) = 1$ существет точное разбиение фазового пространства X на башни Рохлина высоты h_j.

5. Докажите, что для некоторой универсальной константы $a > 0$ из любого накрытия квадрата открытыми квадратами можно выбрать дизъюнктное подпокрытие, накрывающее долю a исходного квадрата в смысле меры.

6. Рассмотрим пространство $X = \mathbb{Z}_2^n$, представляющее собой абелеву группу относительно сложения последовательностей $x \oplus y$, производимого $\pmod 2$. Каким минимальным числом аффинных преобразований можно породить группу G, действующую на пространстве X эргодично?

Пусть теперь A и B — автоморфизмы X. Можно ли построить в этом случае действие группы $\langle A, B \rangle$, эргодическое на $X \setminus \{0\}$.

7. В конечном поле F рассмотрим преобразование $T\colon\ x \mapsto mx$. Существуют ли преобразования такого типа, эргодические на $F^* = F \setminus \{0\}$?

8. Существует ли эргодическое действие на конечном поле, порождённое парой аффинных преобразований

$$T_1\colon\ x \mapsto a_1 x + b_1, \qquad T_2\colon\ x \mapsto a_2 x + b_2.$$

Группа C

1 (*unique-эргодичность поворота*)**.** Докажите, что мера Лебега — единственная R_α-инвариантная мера при иррациональном α.

2. Может ли быть обратимым с точностью до множества меры нуль одно из следующих преобразований отрезка $[0,1]$?

а) $f(0.x_1x_2x_3\dots) = 0.yx_1x_2\dots$, где $y = \phi(x)$,

б) $f(0.x_1x_2x_3\dots) = 0.x_2x_3x_4 \oplus 0.0\dots1_{(\psi(x))}0\dots$,

где ϕ и ψ — два алгоритма (машины Тьюринга), вычисляющие 0 или 1 и натуральное число соответственно.

3. Является ли эргодическим действие на двумерной сфере группы G, порождённое двумя вращениями? Может ли быть всюду плотной какая-либо траектория такого действия? Докажите, что для некоторой пары вращений траектория действия с точностью до счётного множества представляется в виде

$$\mathcal{O} = \cup_{i=1}^n g_i A_i = \cup_{j=1}^m h_j B_j,$$

для некоторых дизъюнктных подмножеств $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subseteq \mathcal{O}$ и элементов $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ (*парадокс Хаусдорфа*).

4. Пусть ν — естественная сингулярная мера на множестве Кантора. Докажите, что для некоторой последовательности $k_j \to \infty$ выполнено

$$\int_0^1 e^{2\pi i\, k_j x}\, d\nu \to c \neq 0.$$

5. Существует ли на бесконечном однородном дереве действие, порождённое конечным числом автоморфизмов, действующее эргодически на вершинах? Приведите пример однородного графа, на котором не существует действия, эргодического в указанном смысле.

6. Докажите следующую геометрическую лемму, предназначенную для доказательства многомерной теоремы Альперна. Пусть заданы три прямоугольника, имеющие размеры (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3). И пусть $(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) = 1$. Тогда существует N, такое, что любой прямоугольник размера (A, B), где $A, B \geq N$, допускает замощение указанными тремя прямоугольниками.

7. Рассмотрим автомат с двумя состояниями, обрабатывающий бинарные последовательности, и действие на последовательностях, порождённое парой инициальных автоматов $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$, отвечающих начальным состояниям 0 и 1 соответственно. Может ли данное действие быть эргодическим действием на отрезке $[0, 1]$?