

Задачи по курсу случайных графов. Часть 1

1. а) Докажите, что для любого свойства \mathcal{Q} выполнено

$$\mathbb{P}(\Gamma(n, p) \models \mathcal{Q} \mid |\Gamma(n, p)| = m) = \mathbb{P}(\Gamma(n, m) \models \mathcal{Q}).$$

б) Пусть \mathcal{Q} — выпуклое свойство подмножеств Γ и $m_1 \leq m \leq m_2 \leq N$, $0 \leq p_1 \leq p \leq p_2 \leq 1$. Докажите, что

$$\mathbb{P}(\Gamma(m) \models \mathcal{Q}) \geq \mathbb{P}(\Gamma(m_1) \models \mathcal{Q}) + \mathbb{P}(\Gamma(m_2) \models \mathcal{Q}) - 1,$$

$$\mathbb{P}(\Gamma(p) \models \mathcal{Q}) \geq \mathbb{P}(\Gamma(p_1) \models \mathcal{Q}) + \mathbb{P}(\Gamma(p_2) \models \mathcal{Q}) - 1,$$

2. а) Докажите, что любое выпуклое свойство есть пересечение возрастающего и убывающего свойств.

б) Докажите, что для любого выпуклого свойства \mathcal{Q} существуют пороговые вероятности $\hat{p}_1 = \hat{p}_1(n) \leq \hat{p}_2 = \hat{p}_2(n)$, удовлетворяющие соотношениям:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\Gamma(n, p) \models \mathcal{Q}) = \begin{cases} 0, & \text{если } p = o(\hat{p}_1); \\ 1, & \text{если } p = o(\hat{p}_2) \text{ и } p = \omega(\hat{p}_1); \\ 0, & \text{если } p = \omega(\hat{p}_2). \end{cases}$$

3. Докажите лемму 1.

Лемма 1. Пусть \mathcal{Q} — монотонное свойство подмножеств $\Gamma(n)$, $a \in [0, 1]$ — фиксированная константа, $m = m(n) \in [0, N]$ — некоторая последовательность. Если для любой функции $p = p(n) \in [0, 1]$ с условием $p = m/N + O\left(\sqrt{m(N-m)}/N^3\right)$ выполнено

$$\mathbb{P}(\Gamma(n, p) \models \mathcal{Q}) \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

то

$$\mathbb{P}(\Gamma(n, m) \models \mathcal{Q}) \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

4. В случайном процессе $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\Gamma}(m), m = 0, \dots, N)$ для возрастающего свойства \mathcal{Q} определим $m_{\mathcal{Q}}^* = \min\{m : \tilde{\Gamma}(m) \models \mathcal{Q}\}$. Докажите, что \hat{m} является пороговой функцией для \mathcal{Q} тогда и только тогда, когда $m_{\mathcal{Q}}^* = \Theta_{\mathbb{P}}(\hat{m})$, т.е. для любой положительной функции $w(n) \rightarrow \infty$ выполнено

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{w(n)}\hat{m} \leq m_{\mathcal{Q}}^* \leq w(n)\hat{m}\right) \rightarrow 1.$$

5. Докажите, что в равномерной модели случайных подмножеств для монотонного свойства \mathcal{Q} существует точная пороговая функция тогда и только тогда, когда

$$\frac{m_{\mathcal{Q}}^*}{m(1/2; n)} \xrightarrow{P} 1.$$

6. Докажите, что в биномиальной модели случайных подмножеств для монотонного свойства \mathcal{Q} существует точная пороговая функция тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ выполнено

$$\frac{p(\varepsilon; n)}{p(1/2; n)} \rightarrow 1.$$

СРОК СДАЧИ понедельник, 12 октября.