

Задачи по курсу случайных графов. Часть 2

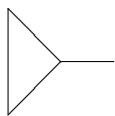
1. Пусть $\Gamma(n) = \{1, \dots, n\}$. Найдите пороговую вероятность в $\Gamma(n, p)$ для свойства содержать четверку (x, y, z, w) — решение уравнения $x + y = z + w$.
2. Пусть $\Gamma(n) = \{1, \dots, n\}$. Найдите пороговую вероятность в $\Gamma(n, p)$ для свойства содержать арифметическую прогрессию длины k .
3. Докажите следствие 1 из теоремы Прохорова в случае а) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$, б) в общем случае.

Следствие 1. Пусть $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность вероятностных мер на полном сепарабельном метрическом пространстве \mathcal{S} . Если она является плотной и любая ее слабо сходящаяся подпоследовательность слабо сходится к одной и той же вероятностной мере Q , то $P_n \xrightarrow{w} Q$.

4. Докажите теорему 1 о равномерной интегрируемости.

Теорема 1. (о равномерной интегрируемости) Пусть $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ — неотрицательные случайные величины. Тогда $E\xi_n \rightarrow E\xi$ тогда и только тогда, когда $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ равномерно интегрируема.

5. Пусть $p \sim c \cdot n^{-k/(k-1)}$, $c > 0$ — фиксированная константа, а X_k — это число деревьев фиксированного размера k в $G(n, p)$. Докажите, что $X_k \xrightarrow{d} Pois(\lambda)$ при $n \rightarrow \infty$, где $\lambda = \frac{c^{k-1}k^{k-2}}{k!}$.
6. а) Пусть $G = C_3 \sqcup C_3$ — два непересекающихся треугольника, $pn \rightarrow c > 0$. Докажите, что тогда $X_G \xrightarrow{d} \frac{1}{2}Z(Z-1)$ при $n \rightarrow \infty$, где $Z \sim Pois(c^3/6)$.
 б) Пусть $G = C_3 \sqcup C_4$ — два непересекающихся цикла длины 3 и 4, $pn \rightarrow c > 0$. Докажите, что тогда $X_G \xrightarrow{d} Z_1 Z_2$, где Z_1 и Z_2 — независимы, $Z_1 \sim Pois(c^3/6)$, $Z_2 \sim Pois(c^4/8)$.
- 7*. Пусть $G = C_3 + K_2$ — треугольник с одной висячей вершиной,



Пусть $pn \rightarrow c > 0$. Докажите, что

$$X_G \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^Z W_i,$$

где $(W_i, i \in \mathbb{N})$ — независимые $Pois(3c)$ случайные величины, а $Z \sim Pois(c^3/6)$, также независимая с ними случайная величина.

СРОК СДАЧИ понедельник, 26 октября.