# Задачи по курсу случайных графов. Часть 3

1. Оказывается, что при $p = c/n$, $c > 0, c \neq 1$, размер максимальной древесной компоненты в $G(n, p)$ имеет порядок $\ln n$.

   а) Докажите, что существует такая константа $\gamma = \gamma(c)$, что $\mathsf{P}(T_k > 0) \to 1$, где $k \geqslant \gamma \cdot \ln n$, а $T_k$ — число древесных компонент размера $k$ в $G(n,p)$.

   б) Обозначим через $L^{(t)}$ — размер максимальной древесной компоненты в $G(n,p)$. Вычислите такую $\gamma = \gamma(c)$, что

$$\frac{L^{(t)}}{\ln n} \xrightarrow{\mathsf{P}} \gamma.$$

2. Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с законом размножения частиц $\xi$. Положим $Y_n = X_n + \ldots + X_0$. Докажите, что имеют место следующие рекуррентные соотношения для производящих функций:

$$\varphi_{X_n}(z) = \varphi_\xi(\varphi_{X_{n-1}}(z)),$$

$$\varphi_{Y_n}(z) = z\varphi_\xi(\varphi_{Y_{n-1}}(z)).$$

3. Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с законом размножения частиц $\xi$. Положим $Y_n = X_n + \ldots + X_0$. Докажите, что для любого $z \in [0, 1)$

$$\varphi_{Y_n}(z) < \varphi_{Y_{n-1}}(z).$$

   Тем самым существует предел $\rho(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(z)$ — производящая функция общего числа частиц в ветвящемся процессе. Докажите, что для любого $z \in [0, 1]$ эта функция удовлетворяет соотношению:

$$\rho(z) = z\varphi_\xi(\rho(z)).$$

   Чему равны $\rho(1)$ и $\rho(0)$?

   **Замечание.** *Если $Y$ — это общее число частиц в ветвящемся процессе, то*

$$\rho(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k \mathsf{P}(Y = k) = \mathsf{E}(z^Y | Y < \infty).$$

4. Пусть $np \to c$, $c > 1$. Докажите, что с вероятностью, стремящейся к 1, гигантская компонента является единственной сложной компонентой в случайном графе $G(n, p)$.

5. Пусть $c_1(n) \to 0$ — положительная функция, причем $c_1(n)n^{\frac{4}{15}} \to +\infty$. Пусть также $c_2(n) - c_1(n) \sim \beta\sqrt{2\pi}(c_1(n))^{5/2}$ для фиксированного $\beta > 0$. Обозначим через $X_n$ — число древесных компонент случайного графа $G(\lambda)$ размера от $c_1(n)n^{2/3}$ до $c_2(n)n^{2/3}$. Докажите, что $X_n \xrightarrow{d} Pois(\beta)$.

6. Докажите, что в модели $G(\lambda)$ максимальный размер древесной компоненты имеет порядок $\Omega_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$, т.е. для любой $w(n) \to 0$ в случайном графе найдется древесная компонента размера не меньше $n^{2/3}w(n)$.

7. Докажите, что функция $p = p(n) = 1/n$ является точной пороговой вероятностью для свойства планарности.

   **Подсказка.** *Нужно использовать задачу 5, представление случайного графа как объединения двух независимых случайных графов с меньшими вероятностями появления ребра, а также критерий Понтрягина–Куратовского планарности графа.*

8. Пусть $X_n$ — число циклов в случайном графе $G(\lambda)$. Докажите, что

   а) $\mathsf{E}X_n \sim \frac{1}{6}\ln n$ при $\lambda < 0$;

   б) $\mathsf{E}X_n \sim \frac{1}{4}\ln n$ при $\lambda = 0$;

   в) $\mathsf{E}X_n \sim c(\lambda)n^{-1/6}\exp\{\lambda^2 n^{1/3}/2\}$ для некоторой постоянной $c(\lambda)$ при $\lambda > 0$.

**СРОК СДАЧИ** понедельник, 23 ноября.