

# Трехсеместровый курс алгебраической геометрии на кафедре дискретной математики МФТИ

А.Я. Канель-Белов и А.М. Елишев

---

В курсе мы изучим основы современной коммутативной алгебры и алгебраической геометрии, а также немалое количество более глубоких вопросов, лежащих за пределами базовой технической программы. Первая часть курса (осенний семестр 2016 года) посвящена коммутативной алгебре, теории Галуа, понятию точки в алгебраической геометрии и связи между алгебраической и геометрической картинками.

## Программа осеннего семестра

### Техническая часть

Коммутативные кольца. Идеалы и факторкольца. Простые и максимальные идеалы, области целостности и поля. Операции на множестве идеалов коммутативного кольца. Нильрадикал и радикал Джекобсона. Гомоморфизмы и изоморфизмы колец, расширение и сужение идеалов. Категория **CRing**, мономорфизмы и эпиморфизмы.

Спектр кольца. Топология Зарисского, открытые и замкнутые подмножества. Отображения спектров, индуцированные гомоморфизмами колец. Прямая сумма и прямое произведение колец, спектр прямого произведения (конечного числа колец), связность и неприводимость. Топология на множестве максимальных идеалов и теорема Гильберта о нулях. Аффинные алгебраические многообразия, регулярные отображения. Алгебра  $C(X)$  непрерывных функций на бикompактах и паракомпактах, ее максимальные идеалы, точки  $X$ , касательные и кокасательные расслоения.

Модули. Подмодули и фактормодули. Гомоморфизмы. Конечнопорожденные модули. Точные последовательности. Лемма о расщеплении, коммутативные диаграммы с точными строчками (snake lemma, five lemma, nine lemma...). Точные функторы. Тензорное произведение модулей. Плоские модули. Расширение и ограничение скаляров. Алгебры. Индуктивные системы модулей и прямой предел. Проективные и инъективные модули. Наследственные и полунаследственные кольца. Конечнопорожденные  $C(X)$ -модули, векторные расслоения над паракомпактом  $X$ , теорема Серра – Суона.

Кольца и модули частных. Мультипликативные системы, локализация, свойства универсальности и точности локализации. Локальные кольца, поля вычетов. Локальные свойства. Поведение идеалов при локализации. Абсолютно плоские кольца. Дальнейшие свойства топологии Зарисского. Предпучки, пучки и окольцованные пространства. Пучок колец над открытой базой топологии Зарисского.

Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе идеала.

Конечные расширения полей, целые расширения колец. Кольца целых. Теоремы о подъеме и спуске. Кольца нормирования.

### Идейная часть

Разрешимость полиномиальных уравнений в радикалах, теорема Абеля – Руффини. Разрешимые и неразрешимые группы. Автоморфизмы конечных расширений полей, группы Галуа и теорема Галуа о соответствии. Построения циркулем и линейкой.

Алгебраические функции комплексной переменной. Аналитическое продолжение. Римановы поверхности. Группа монодромии алгебраической функции и фундаментальная группа комплексной плоскости с выколотыми особенностями. Разветвленные накрытия, группа автоморфизмов накрытия.

Конформные отображения многоугольников на верхнюю полуплоскость. Принцип симметрии Римана – Шварца и формула Шварца – Кристоффеля. Эллиптические функции. Разрешимость дифференциальных уравнений в квадратурах.

Теория Галуа и понятие точки в алгебраической геометрии.

## Список литературы

- [1] Атья М.Ф., Макдональд И.Г., *Введение в коммутативную алгебру*, Мир, 1972.
- [2] Karplansky I., *Commutative Rings*, University of Chicago Press, 1974.
- [3] Шафаревич И.Р., *Основы алгебраической геометрии*, УМН, 1969.
- [4] Винберг Э.Б., *Курс алгебры*, МЦНМО, 2011.
- [5] Постников М.М., *Теория Галуа*, Факториал Пресс, 2003.
- [6] Mac Lane S., *Categories for the Working Mathematician*, 2nd edition, Springer, 1998.