Программа курса «Теория вероятностей»

1. Классическое (комбинаторное) определение вероятности. Свойства вероятности при таком определении. Формула включений и исключений (б/д). Задача о беспорядках.

2. Геометрические вероятности и их свойства. Пример задачи, для решения которой удобно использовать геометрические вероятности (задача о встрече).

3. Условные вероятности, умножение вероятностей, формулы полной вероятности и Байеса. Независимость событий: попарная независимость, независимость в совокупности, соотношение между видами независимости.

4. Схема испытаний Бернулли. Понятие о случайном блуждании и случайном графе.

5. Предельная теорема Пуассона. Интегральная предельная теорема Муавра – Лапласа (б/д; см., впрочем, п. 20). Пример применения теоремы Муавра – Лапласа в задаче о гардеробах.

6. Общая вероятностная модель. Аксиоматика Колмогорова.

7. Случайные величины. Функция распределения и ее свойства. Дискретные и абсолютно непрерывные распределения, плотность распределения. Важнейшие распределения: биномиальное, пуассоновское, геометрическое, равномерное, нормальное, Коши, экспоненциальное (показательное).

8. Задание вероятностной меры на прямой с помощью функции распределения. Теорема о продолжении меры (б/д). **Кажется, этого не было?**

9. Распределение функций от случайных величин.

10. Математическое ожидание случайной величины. Линейность математического ожидания. Математическое ожидание функции

от случайной величины. Примеры комбинаторных задач, решаемых за счет линейности математического ожидания (теорема о числе треугольников в случайном графе).

11. Независимость случайных величин. Свойства математического ожидания и дисперсии для независимых случайных величин. Ковариация и корреляция. Соотношение между независимостью и некоррелированностью.

12. Моменты. Факториальные моменты. Дисперсия. Вычисление моментов для распределений из п. 7.

13. Неравенства Маркова и Чебышёва. Применение в задаче о числе треугольников в случайном графе. Закон больших чисел для независимых (или даже попарно некоррелированных) одинаково распределенных величин с конечным вторым моментом (или даже по-разному распределенных, но с равномерно ограниченной дисперсией). Оценка уклонения для схемы Бернулли и ее соотношение с неравенством Чебышёва.

14. Метод моментов (формула обращения). Пуассоновская аппроксимация (со слегка неаккуратным доказательством, но пониманием, где эта неаккуратность). Применения в задаче о числе треугольников в случайном графе (без детальных выкладок).

15. Случайные векторы. Совместное распределение вероятностей. Многомерная функция распределения и ее свойства. Многомерная плотность распределения. Задание вероятностной меры в n-мерном пространстве (идея). **Видимо, последней фразы тоже не было.**

16. Распределение сумм независимых случайных величин. Формула свертки.

17. Распределение функций от нескольких случайных величин. Математическое ожидание функции от нескольких случайных величин.

18. Виды сходимости последовательностей случайных величин. Сходимость по вероятности слабее сходимости почти наверное (пример в одну сторону, в другую сторону – б/д). Интерпретация предельных теорем Пуассона и Муавра – Лапласа в терминах сходимостей.

19. Усиленный закон больших чисел (в двух вариантах, оба б/д).

20. Характеристические функции и их свойства. Разложение в ряд Тейлора. Вычисление характеристических функций для распределений из п. 7. Метод характеристических функций: теоремы единственности и непрерывности (б/д). Применение в задаче о сумме независимых пуассоновских величин.

21. Центральная предельная теорема для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Связь с предельной теоремой Муавра – Лапласа. Теорема Берри – Эссеена (б/д).

22. Закон больших чисел без условия конечности второго момента. Соотношения между различными законами больших чисел (всего 4 формулировки).

23. Понятие о случайном веб-графе.