2017/18 учебный год

Динамические системы

1. Конструкции динамических систем

Часть A

1. Пусть дан линейный оператор $A : x \mapsto Ax$, где $x \in \mathbb{R}^n$. При каких условиях данное отображение непрерывно? является гомеоморфизмом? Определите, в каких случаях отображение сохраняет меру?

2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

и определим динамическую систему — *фазовый поток* T^t, отображающий точку (x_0, y_0) в точку $(x_1, y_1) = (x(t), y(t))$, если $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Проверьте, что данный поток сохраняет меру Лебега на плоскости. Далее, докажите, что T^t — диффеоморфизм $\mathbb{R}^2$.

3. Запишите, как действуют преобразования S^2, S^{-1}, S^0, где S — преобразование сдвига на пространстве Σ_2 двусторонних последовательностей из нулей и единиц.

4. Найдите все неподвижные и все периодические точки преобразования сдвига $S\colon \Sigma_2 \to \Sigma_2$.

5. Найдите периодические точки преобразования $z \mapsto z^2$, действующего на множестве комплексных чисел, таких, что $|z| = 1$.

6. Проверьте, что орбита поворота окружности на угол α всюду плотна в окружности, если отношение $\alpha/2\pi \notin \mathbb{Q}$.

7. Постройте диаграмму конечных кодов для преобразования $T\colon \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $Tx = x + 3 \pmod 5$ относительно разбиения $B_0 = \{0, 1, 2\}$, $B_1 = \{3, 4\}$.

Часть B

8. Исследуйте диаграмму конечных кодов для поворота окружности на иррациональный угол, построенную для разбиения $\{[0, \alpha), [\alpha, 1)\}$.

9. Найдите замыкание траектории потока T^t, порождённого постоянным векторным полем $v = (v_1, v_2)$ на двумерном торе $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ в общем случае и для следующих значений: а) $v = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, б) $v = (\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

10. Рассмотрим дифференциальное уравнение, задающее малые колебания относительно невырожденного квадратичного потенциального поля на плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$\ddot{X} = -\operatorname{grad} V(X),$$

где

$$V(X) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \qquad X = (x, y),$$

причём форма $V(x)$ положительно определена. Найдите замыкание кривой $\gamma = (x(t), y(t))$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, вдоль которой движется наша точка, при условии, что в момент времени $t = 0$ система находилась в точке (x_0, y_0) и имела нулевоую скорость.

Исследуйте случаи:
а) $V(X) = \omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2$;
б) $V(X) = 2x^2 + xy + 2y^2$;
в) $V(X) = 3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2$.

11. Пусть $X \subset \Sigma_2$ — подмножество последовательностей (x_i), удовлетворяющих уравнению

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = 0 \pmod 2,$$

где i пробегает $\mathbb{Z}$. Является ли множество X открытым? инвариантным относительно сдвига?

Часть C

12. Существуют ли R_α-инвариантные борелевские меры, отличные от меры Лебега? Здесь R_α — преобразование поворота окружности.

13. Какими инвариантными мерами обладает поток T^t задачи 9 в зависимости от v ? Приведите примеры.

14. Может ли гомеоморфизм T компакта иметь конечное число $n > 1$ периодических точек? Может ли T иметь конечное число n неподвижных точек, и при этом ни одной периодической с периодом, больше единицы?

15. Предположим, что гомеоморфизм T компакта X имеет бесконечное число периодических точек (орбит). Верно ли, что множество периодических точек всюду плотно в X ?

16. Приведите пример динамической системы, генерирующей диаграмму конечных кодов над алфавитом $\mathbb{A} = \{0, 1\}$ со следующим свойством: ровно два префикса имеют *не*однозначное продолжение.