

ПРОГРАММА КУРСА
Динамические системы

1. Действие группы (полугруппы) как универсальная модель динамической системы. Примеры инвариантных структур на фазовом пространстве: топологические динамические системы, действия с инвариантной и квази-инвариантной мерой.

2. Кодирование динамических систем. Символическая динамика. Примеры символических систем: схема Бернулли, процесс Маркова, подстановочные системы. Топология на пространстве последовательностей. Свойства преобразования сдвига.

3. Марковское кодирование гиперболического автоморфизма Аносова на двумерном торе.

4. Динамические системы с инвариантной мерой и индуцированные ими случайные процессы. Конструкция системы, порождённой бесконечным словом: инвариантный компакт и стандартная инвариантная мера. Теорема Боголюбова–Крылова о существовании инвариантной меры гомеоморфизма компакта.

5. Эргодические теоремы Фон Неймана и Биркгофа–Хинчина. Лемма Рохлина–Халмоша. Эргодические меры как крайние точки множества инвариантных мер.

6. Спектральная теорема. Унитарное представление Купмана. Циклические пространства и спектральные меры. Спектральные инварианты. Примеры спектрального исследования: схема Бернулли, автоморфизм Аносова, поворот окружности, одомер.

7. Джойнинги. Теорема о классификации автоморфизмов с чисто точечным спектром.

8. Статистические свойства: перемешивание, слабое перемешивание, и их спектральная интерпретация. Простота спектра автоморфизмов ранга 1. Примеры динамических систем с сингулярным спектром. Теорема Винера.

9. Понятие об энтропии динамической системы. Энтропия и информация. Теорема Шеннона–Макмиллана–Бреймана. Разбиение Пинскера. К-системы.

10. Дизъюнктность динамических систем. Факторы и расширения.

11. Символическая сложность. Оценка сложности аperiodических последовательностей. Примеры вычисления сложности системы: поворот окружности, система ранга 1, схема Бернулли.

12. Динамические системы, связанные с дифференциальными уравнениями. Системы классической и квантовой механики. От потока к диффеоморфизму и обратно: отображение Пуанкаре и надстройка. Автоморфизмы перекладывания отрезков.

13. Предельное поведение траекторий. Теорема Пуанкаре–Бендиксона.

14. Гиперболические системы. Устойчивое и неустойчивое многообразия. Подкова Смейла. Аттракторы. Мультипликативная эргодическая теорема.