

Случайные графы (Жуковский М. Е.)

- Две модели случайных множеств и случайных графов. Свойства множеств и свойства графов. Монотонные свойства.
- Асимптотическая эквивалентность двух моделей случайных множеств. Пороговые вероятности монотонных свойств.
- Пороговая вероятность связности.
- Пороговая вероятность для свойства содержать фиксированный подграф и пуассоновская ап-проксимация на пороге.
- Мартингалы и неравенство Азумы. Концентрация хроматического числа случайного графа.
- Концентрация числа независимости случайного графа.
- Логика первого порядка. Законы нуля или единицы. Теорема Эренфойхта. Доказательство теоремы Глебского и др. о законе нуля или единицы при $p = \text{const}$.
- Эволюция случайного графа: $p = o(1/n)$ (ацикличность и отсутствие больших деревьев, количество малых деревьев) и $p = c/n$, $c < 1$ (отсутствие больших и сложных компонент).
- Ветвящиеся процессы. Возникновение гигантской компоненты при $p = c/n$, $c > 1$, и ее размер.

Теория графов (Жуковский М. Е.)

- Базовые понятия теории графов. Определение графа, ориентированного графа, и т.д.
- Эквивалентные определения дерева. Формула Кэли.
- Планарные графы. Формула Эйлера.
- Подсчет унциклических графов. Эйлеровы циклы. Критерий эйлеровости.
- Гамильтоновы циклы. Критерий Дирака. Критерий Хватала.
- Теорема Холла.
- Теорема Кёнига.
- Теорема Турана. Пример графа, на котором оценка Турана достигается.
- Задача о знакомствах среди шести человек. Числа Рамсея. Нижняя оценка.

Гиперграфы (А.А. Глибичук, А.М. Райгородский)

- Понятие гиперграфа. Теорема Эрдеша-Ко-Радо. Теорема Алсведе-Хачатряна (без доказательства, но с пояснением).
- Кнезеровский граф и его свойства. Вычисление его числа независимости, кликового числа. Простые оценки на его хроматическое число.
- Теорема Борсука-Улама/Люстерника-Шнирельмана (без доказательства). Вычисление хроматического числа Кнезеровского графа.
- Линейно-алгебраический метод. Задача о максимальной по размеру совокупности 3-элементных подмножеств n -элементного множества, которые не пересекаются по одному элементу.
- Линейно-алгебраический метод. Задача о максимальной по размеру совокупности 5-элементных подмножеств n -элементного множества, которые не пересекаются по двум элементам.
- Теорема Франкла-Уилсона о максимальной по размеру совокупности k -элементных подмножеств n -элементного множества с запретными пересечениями.
- Хроматическое число плоскости и n -мерного пространства. Его верхние и нижние оценки. Применение теоремы Франкла-Уилсона к задаче о получении нижней оценки на хроматическое число n -мерного пространства.
- Системы общих представителей (с.о.п.). Верхняя оценка на мощность минимальной с.о.п. при помощи жадного алгоритма.
- Теорема о существовании гиперграфа с большой с.о.п. Эффективность жадного алгоритма.
- Задача Эрдеша-Хайнала. Гиперграфовое число Рамсея.
- Теорема Франкла-Уилсона о конструктивной нижней оценке на диагональное число Рамсея.

Аддитивная комбинаторика (Шкредов И. Д.)

- Теорема Коши о размере множества $A + B$ в Z_p .
- Числа Рамсея (формулировки теорем б/д). Из теории Рамсея показать вывод теоремы Шура.
- Теорема ван-дер-Вардена о раскрасках: 1) случай 2 цветов и прогрессий длины 3 2) произвольный случай.
- Лемма регулярности Семереди (б/д). Лемма об удалении треугольников. Вывод из нее теоремы Рота о том, что $\alpha_3(n) = o(1)$.
- Суммы и разности множеств. Неравенство треугольника Ружи. Коэффициент растяжения. Лемма Петридиса. Следствия леммы Петридиса.
- Константа удвоения. Вывод неравенства Плюнке-Ружи из леммы Петридиса. Примеры множеств с малым удвоением. Теорема Фреймана в Z (б/д).
- Характеры в Z_n , Z_n^* . Ортогональность, двойственная ортогональность. Дискретное преобразование Фурье. Равенство Парсеваля. Тожество Планшереля. Формула обращения.
- Свертки, доказательство того, что преобразование Фурье переводит свертку в произведение. Аддитивная энергия множества. Число решений уравнения $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 0$ в терминах Фурье.
- Оценка на коэффициенты Фурье для арифметической прогрессии. α -равномерные множества. "Случайная" распределенность α -равномерного множества в арифметической прогрессии.
- Теорема Рота в Z_n^3 (схема доказательства). Лемма про арифметические прогрессии длины 3 в α -равномерном множестве.

Теория кодирования (А.Б. Дайняк)

Литература: см. [страницу курса](#)

- Докажите границу Плоткина. Приведите пример кодов, на которых эта граница достигается. Как применить границу Плоткина к двоичным кодам, у которых кодовое расстояние меньше половины длины слов?
- Докажите лемму о числе векторов в евклидовом пространстве и примените её для доказательства границы Элайеса—Бассалыго.
- Докажите теорему Соломона—Штиффлера об остаточном коде и примените её для доказательства границы Грайсмера—Соломона—Штиффлера.
- Докажите корректность алгоритма Сипсера—Шпильмана (декодирование кодов на основе графов-расширителей).

Теория игр (Д.Г. Ильинский, Д.В. Мусатов, А.В. Савватеев)

- Статические игры. Доминирующие и доминируемые стратегии. Решение игр по доминированию. Понятие равновесия Нэша. Смешанное равновесие Нэша. Равновесие в игре «пионеры и вожатый».
- Динамические игры. Равновесие Нэша, совершенное на подыграх, и его соотношение с обычным равновесием. Динамические игры с неполной информацией. Информационные множества. Условие совершенной памяти. Равновесие Байеса. Равновесие дискретного отклика. Статические игры с неполной информацией.
- Кооперативные игры с трансферабельной полезностью. Определение игры, доступные дележи, ядро и вектор Шепли. Игра «Аэропорт». Устойчивые паросочетания. Алгоритм Гейла-Шепли.
- Модели олигополий Курно и Бертрана. Элементы теории аукционов. Равновесные стратегии в аукционах первой и второй цены.