

Введение.

Общая формулировка задачи. Численная неразрешимость задачи оптимизации в общей форме. Концепция черного ящика. Оценки сложности для класса липшицевых функций. Визитные карточки областей оптимизации.

Элементы выпуклого анализа. Ben-Tal-Nemirovski

Выпуклые множества и операции над ними. Выпуклая оболочка. Относительная внутренность. Топологические свойства выпуклых множеств.

Теоремы Каратеодори, Радона, Хелли. Многогранные множества. Теорема об альтернативах и двойственность задачи линейного программирования. Теорема отделимости. Поляра. Двойственный конус. Лемма Милютина-Дубовицкого.

Определения и свойства выпуклых функций. Надграфик. Неравенство Йенсена. Операции сохраняющие выпуклость. Липшицева непрерывность выпуклых функций. Экстремумы выпуклых функций.

Субдифференциал. Опорные гиперплоскости. Преобразование Лежандра и его свойства.

Задача выпуклого программирования. Теорема об альтернативах в выпуклом случае. Лагранжиан. Двойственность задачи выпуклого программирования. Условия оптимальности в седловой форме. Условия Каруша-Куна-Таккера и условие Слейтера. Двойственность в линейном и квадратичном программировании.

Седловые точки. Интерпретации в теории игр. Минимаксная лемма и теорема Сиона-Какутани.

Задача математического программирования общего вида. Линеаризация. Условия оптимальности 1го и 2го порядков.

[Nocedal-Wright, Chapter 3] + [Поляк, Разделы 1.4 и 1.5] [Ben-Tal-Nemirovski, pp. 164-166]

Минимизация функции без производной: метод золотого сечения, метод парабол. Гибридный метод минимизации Брента. Методы решения уравнения $f'(x)=0$: метод деления отрезка пополам, метод секущей. Минимизация функции с известной производной: кубическая аппроксимация и модифицированный метод Брента. Поиск ограничивающего сегмента. Условия Армихо и Вольфа для неточного решения задачи одномерной оптимизации. Неточные методы одномерной оптимизации, backtracking. Неточная одномерная оптимизация. Метод градиентного спуска, выбор длины шага.

Гладкая выпуклая оптимизация. [Нестеров 2010]

Нижние границы аналитической сложности для класса выпуклых функций с Липшицевым градиентом. Нижние границы аналитической сложности для класса сильно выпуклых с Липшицевым градиентом. Эффективность градиентного метода и его неоптимальность.

Оптимальные методы. Оценивающие последовательности. Общая схема метода быстрых градиентов. Варианты метода быстрых градиентов и их оценки скорости сходимости. Понятие градиентного отображения и его свойства. Аналог градиентного метода и метода быстрых градиентов для задач условной минимизации. Оценки их скорости сходимости. Задача минимизации функций с гладкими компонентами.

[Nocedal-Wright, Chapter 5]

Метод сопряженных градиентов для решения систем линейных уравнений, скорость сходимости метода, предобуславливание; . Метод сопряженных градиентов для оптимизации неквадратичных функций, стратегии рестарта, зависимость от точной одномерной оптимизации

Негладкая оптимизация.[Нестеров 2010]

Субградиентный метод на простых множествах. Оценка его сходимости. Субградиентный метод на множестве с функциональными ограничениями и его оценка сходимости. Оптимальность субградиентного на данном классе задач. Минимизация при функциональных ограничениях.

[Нестеров диссертация, 2]

Прямо-двойственные методы решения негладких задач. Нижняя линейная аппроксимация (модель) исходной целевой функции. Функция зазора и ее свойства. Общая схема двойственного усреднения. Метод простого двойственного усреднения. Метод взвешенного двойственного усреднения. Оценки скорости сходимости. Применение метода двойственного усреднения к общей задаче минимизации, прямо-двойственной задаче, минимаксной задаче, седловой задаче. Экономическая интерпретация метода двойственного усреднения (модель сбалансированного развития). Стохастическая оптимизация.

Методы второго порядка.

Метод Ньютона: схема метода, скорость сходимости для выпуклых функций с липшицевым гессианом, подбор длины шага, способы коррекции гессиана до положительно-определённой

матрицы.

Неточный (безгессианный) метод Ньютона: схема метода, способы оценки произведения гессиана на вектор через вычисление градиента; [Nocedal-Wright, pp. 184-189] (Автоматическое дифференцирование) [Nocedal-Wright, Section 8.2] Квазиньютоновские методы оптимизации: SR1, BFGS и L-BFGS. [Nocedal-Wright, Section 6] (Метод L-BFGS) [Nocedal-Wright, pp. 176-180]

Самосогласованные функции и барьеры.

Определение и свойства самосогласованных функций. Поведение самосогласованной функции у границы области определения. Основные неравенства. Минимизация самосогласованных функций. Метод Ньютона для самосогласованных функций. Определение самосогласованных барьеров. Основные свойства. Стандартная задача минимизации. Центральная траектория. Схема отслеживания. Задачи с функциональными ограничениями.

[Нестеров диссертация, 2.3]

Минимизация составных функций. Генерация разреженных решений Постановка задачи. Понятие градиентного композитного отображения и его свойства. Прямой градиентный метод. Оценки его скорости сходимости в выпуклом и сильно выпуклом случае. Двойственный градиентный метод и его оценки скорости сходимости. Двойственный градиентный метод с ускорением и его оценки скорости сходимости. Применение данных методов к решению задачи разреженных наименьших квадратов. Обсуждение численных результатов.

[Нестеров диссертация, 5]

Гладкая минимизация для негладких функций: прорыв за пределы возможного. Постановка задачи. Функции с явно заданной структурой. Понятие сопряженной (дуальной) задачи. Прокс-функция. Техника сглаживания. Оптимальная схема для решения задач гладкой задачи. Применение данного подхода к матричным играм, задаче Штейнера, вариационным неравенствам.