

# Программа государственного экзамена по дискретной математике и информатике '2019 (Часть «Дискретная математика»)

## 1. Математическая логика и теория алгоритмов

1. Понятия множества и подмножества. Операции над множествами, тождества. Отображения и соответствия. Сравнение множеств по мощности. Теорема Кантора–Бернштейна. Счётные множества и их свойства. Теорема Кантора.
2. Булевы функции и пропозициональные формулы. Конъюнктивная и дизъюнктивная нормальные формы. Тавтологии. Исчисление высказываний: аксиомы, правила вывода, определение выводимости, примеры выводов. Корректность исчисления высказываний. Лемма о дедукции. Полнота исчисления высказываний: формулировка и идея доказательства.
3. Языки первого порядка: сигнатуры, термы, правила построения формул. Интерпретации, оценки, определение истинности формулы. Выразимость предикатов: определение, примеры, доказательство невыразимости при помощи автоморфизмов.
4. Общезначимые формулы первого порядка. Исчисление предикатов: формулы и правила вывода. Корректность исчисления предикатов. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов: различные формулировки и общая схема доказательства.
5. Машины Тьюринга. Вычислимые функции. Разрешимые и перечислимые множества. Неразрешимость проблем самоприменимости и остановки. Теорема Райса–Успенского (б/д). Теорема Клини о неподвижной точке (б/д). Существование программы, печатающей свой собственный текст.
6. Формальная арифметика. Примеры выводов в аксиоматике Пеано. Моделирование машин Тьюринга в формальной арифметике (б/д). Теорема Гёделя о неполноте: формулировка и идея доказательства.
7. Лямбда-исчисление. Лямбда-термы и комбинаторы. Преобразования: альфа-конверсия и бета-редукция. Нормальная форма. Теорема Чёрча–Россера (б/д). Нумералы Чёрча. Комбинаторы, представляющие сложение и умножение. Представление логических значений и операций. Комбинатор неподвижной точки, выражение функции факториала.
8. Измерение сложности алгоритма и сложности задачи. Классы P и NP. Сводимость задач по Карпу. NP-полнота. Теорема Кука–Левина: формулировка и идея доказательства. Сводимость задачи о выполнимости 3-КНФ к одной из задач: клика, вершинное покрытие, 3-раскраска, гамильтонов путь, задача о рюкзаке, целочисленное линейное программирование – или другой подобной.

## 2. Дискретные структуры

1. Основные правила комбинаторики: правило сложения, правило умножения. Принцип Дирихле. Формула включения-исключения: доказательство, применение для вывода формулы для числа беспорядков. Базовые комбинаторные конфигурации: размещения, перестановки и сочетания. Формулы для количеств размещений, перестановок и сочетаний. Формула Стирлинга (б/д).
2. Формула бинома Ньютона, полиномиальная формула. Свойства биномиальных коэффициентов: симметричность, унимодальность, рекуррентная формула треугольника Паскаля. Знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов.

Оценки для биномиальных коэффициентов при  $n \rightarrow \infty$ : асимптотика  $\frac{n}{k}$  в случае  $k = \text{const} \cdot n$  и в случае  $k = o(\sqrt{n})$ .

3. Формальные степенные ряды: определение, операции над рядами (сумма, разность, произведение, частное, производная). Теорема Коши о радиусе сходимости (с доказательством). Производящие функции: определение, примеры производящих функций для последовательности биномиальных коэффициентов и для чисел Фибоначчи. Пример применения производящих функций для доказательства комбинаторных тождеств.
4. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами (л.р.с.п.к.). Пример содержательной задачи, приводящей к л.р.с.п.к. Общий вид решения в произвольном случае (б/д). Доказательство теоремы об общем виде решения у л.р.с.п.к. второго порядка (в том числе при кратных корнях характеристического многочлена).
5. Определение простого графа, орграфа, мультиграфа, псевдографа, гиперграфа. Маршруты в графах, степени вершин. Изоморфизм графов, гомеоморфизм графов. Планарность графов: определение планарного графа, формула Эйлера, верхняя оценка числа рёбер в планарном графе. Критерий Понтрягина–Куратовского (доказательство необходимости; достаточность без доказательства). Эйлеровы и гамильтоновы циклы в графах: критерий эйлеровости, достаточное условие гамильтоновости.
6. Хроматическое число, число независимости, кликовое число. Нижняя оценка хроматического числа через число независимости и через кликовое число; сравнение порядка этих оценок для случайного графа  $G(n, \frac{1}{2})$  в модели Эрдёша–Реньи. Теорема Эрдёша о существовании графов с произвольно большим обхватом и хроматическим числом.
7. Системы общих представителей (с.о.п.): определение, примеры задач, сводящихся к построению с.о.п.. Тривиальные верхняя и нижняя оценки размера минимальной с.о.п.. Жадный алгоритм построения с.о.п., теорема о верхней оценке размера «жадной с.о.п.». Теорема о неувлучшаемости этой оценки в общем случае (б/д).
8. Числа Рамсея: определение, и точные значения  $R(s, t)$  при  $s \leq 3$ ,  $t \leq 4$ . Верхняя оценка Эрдёша—Секереша, её следствие для диагональных чисел Рамсея; нижняя оценка диагональных чисел с помощью простого вероятностного метода.
9. Гиперграфы. Гиперграфы  $t$ -пересечений. Теорема Эрдёша–Ко–Радо (о максимальном числе рёбер в гиперграфе 1-пересечений). Основы линейно-алгебраического метода: теорема Франкла–Уилсона, конструктивная нижняя оценка чисел Рамсея.

### 3. Теория вероятностей и математическая статистика

1. Вероятностное пространство, аксиомы Колмогорова, свойства вероятностной меры. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимость.
2. Случайные величины и векторы. Характеристики случайной величины и вектора: распределение вероятностей, функция распределения и её свойства,  $\sigma$ -алгебра, порожденная случайной величиной. Примеры конкретных распределений.
3. Математическое ожидание случайной величины: определение для простых, неотрицательных и произвольных случайных величин. Основные свойства математического ожидания (доказательства только для простых величин). Дисперсия и ковариация, их свойства.

4. Сходимость случайных величин: по вероятности, по распределению, почти наверное, в среднем. Связь между сходимостями (б/д). Лемма Слуцкого. Теорема о наследовании сходимости. Дельта-метод.
5. Неравенство Маркова, неравенство Чебышёва. Закон больших чисел в форме Чебышёва. Усиленные законы больших чисел (б/д).
6. Характеристические функции случайных величин и векторов и их свойства. Теорема непрерывности (б/д).
7. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин.
8. Выборка, выборочное пространство. Точечные оценки параметров и их основные свойства: несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность. Выборочные среднее, медиана, дисперсия. Сравнение оценок, функция потерь и функция риска. Подходы к сравнению оценок: равномерный, байесовский, асимптотический.
9. Методы построения оценок: метод моментов и метод максимального правдоподобия. Состоятельность оценки метода моментов. Теорема о свойствах оценок максимального правдоподобия (б/д).
10. Доверительные интервалы. Метод центральной статистики. Метод построения асимптотических доверительных интервалов.
11. Статистические гипотезы, ошибки первого и второго рода, уровень значимости критерия. Общие принципы сравнения критериев, равномерно наиболее мощные критерии. Лемма Неймана–Пирсона. Построение с её помощью наиболее мощных критериев.

## Дополнительные вопросы

Приводимый список вопросов дан для ориентира; он отнюдь не является исчерпывающим. От студентов, претендующих на отличную оценку, ожидается умение отвечать на подобные вопросы.

- Какое в точности вероятностное пространство в модели Эрдёша–Реньи  $G(n, p)$  (как в данном случае определяются все элементы колмогоровской вероятностной тройки)?
- Как можно было бы, используя только множество в качестве неопределяемого понятия, определить на его основе сочетания и размещения с повторениями и без?
- Почему, в отличие от эйлеровости, на то, что когда-нибудь будет придуман «хороший» (быстро проверяемый) критерий гамильтоновости, надежды мало?
- Выведите “слабую формулу Стирлинга”,  $\ln n! \sim n \ln n$ , оценив соответствующую сумму интегралом.
- Счётно ли множество всех  $k$ -сочетаний с повторениями из  $\mathbb{N}$ ? Счётно ли множество всех формальных степенных рядов с коэффициентами из  $\mathbb{N}$ ? Счётно ли множество всех последовательностей натуральных чисел, удовлетворяющих какому-либо фиксированному л.р.с.п.к.? Перечислимы ли все указанные выше множества? Разрешимы ли они?
- Пусть  $a_k$  — количество формул длины  $k$  в исчислении высказываний, в которых встречаются только переменные  $x$  и  $y$ . Запишите рекуррентное соотношение (это будет вовсе не л.р.с.п.к.), позволяющее вычислять  $a_k$ , зная  $a_1, \dots, a_{k-1}$ .
- Как построить 95%-й доверительный интервал для  $p$  в модели Эрдёша–Реньи  $G(n, p)$ ?