Список вопросов к зачету по курсу **«Случайные графы I»**

Осень 2019

1. Модели случайных графов. Классические модели: биномиальная и равномерная. Графовые случайные процессы. Общая теория случайных подмножеств, биномиальная и равномерная модели.

2. Монотонные свойства конечных подмножеств. Примеры. Лемма о монотонности вероятности обладания монотонным свойством для случайного подмножества. Выпуклые свойства, примеры.

3. Асимптотическая эквивалентность моделей $\Gamma(p)$ и $\Gamma(m)$: одинаковое асимптотическое поведение вероятности обладания свойством для случайных подмножеств в этих моделях. Две леммы и итоговое следствие для монотонных свойств.

4. Пороговые вероятности и пороговые функции обладания монотонными свойствами случайным подмножеством. Критерий того, что данная функция является пороговой вероятностью для монотонного свойства Q. Теорема о существовании пороговой вероятности для произвольного монотонного свойства случайных подмножеств. Определение точной пороговой вероятности для монотонного свойства, примеры.

5. Малые подграфы в случайном графе $G(n,p)$. Функция $m(G)$, сбалансированные и строго сбалансированные графы, примеры. Леммы о среднем количестве и дисперсии числа подграфов случайного графа $G(n,p)$, изоморфных данному фиксированному графу G. Теорема о пороговой вероятности появления подграфа случайного графа $G(n,p)$, изоморфного данному фиксированному графу G.

6. Метод моментов. Достаточное условие того, что случайная величина однозначно определяется своими моментами. Примеры таких случайных величин. Плотность и относительная компактность семейства вероятностных мер в метрическом пространстве. Теорема Прохорова, следствие из нее. Многомерный метод моментов.

7. Пуассоновская предельная теорема для числа подграфов случайного графа $G(n,p)$, изоморфных данному фиксированному строго сбалансированному графу G. Многомерное обобщение пуассоновской предельной теоремы. Центральная предельная теорема для числа подграфов случайного графа $G(n,p)$, изоморфных данному фиксированному графу G.

8. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np \to 0$: максимальный размер и структура компонент связности. Предельные теоремы для числа компонент фиксированного размера.

9. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = c \in (0, 1)$: теорема о максимальном размере компоненты связности. Сложные и унициклические компоненты в таком графе — предельные теоремы для числа таких компонент. Общее число вершин в унициклических компонентах.

10. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = c > 1$. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона. Уравнение для нахождения вероятности вырождения. Теорема о гигантской компоненте. Центральная предельная теорема для размера максимальной связной компоненты.

11. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = 1 + \lambda n^{-1/3}$. Максимальный размер унициклических и сложных компонент. Асимптотический порядок размера максимальной древесной компоненты случайного графа. Лемма об отсутствии сложных компонент маленького размера. Ограниченность максимальной сложности компоненты в случайном графе. Следствие: количество, размер и сложность сложных компонент.

12. Распределение степеней вершин в случайном графе. Теорема о предельном распределении числа вершин степени k в случайном графе $G(n, p)$. Аналогичные теоремы для числа вершин степени не менее (не более) k. Теоремы о предельной концентрации максимальной и минимальной степеней вершин в случайной графе $G(n, p)$.

13. Связность случайного графа $G(n, p)$. Теорема о предельной вероятности связности $G(n, p)$. Точная пороговая вероятность свойства связности $G(n, p)$. Понятие вершинной и реберной k-связности. Лемма о сепараторах. Теорема о совпадении моментов в графовом случайном процессе $(\tilde{G}(m), m = 0, \ldots, \binom{n}{2})$.