Задачи по курсу случайных графов. Часть 1

1. а) Докажите, что для любого свойства $\mathcal{Q}$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q} \middle| |\Gamma(n,p)| = m\right) = \mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right).$$

   б) Пусть $\mathcal{Q}$ — выпуклое свойство подмножеств Γ и $m_1 \leqslant m \leqslant m_2 \leqslant N$, $0 \leqslant p_1 \leqslant p \leqslant p_2 \leqslant 1$. Докажите, что

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(m) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(m_1) \vDash \mathcal{Q}\right) + \mathsf{P}\left(\Gamma(m_2) \vDash \mathcal{Q}\right) - 1,$$

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(p) \vDash \mathcal{Q}\right) \geqslant \mathsf{P}\left(\Gamma(p_1) \vDash \mathcal{Q}\right) + \mathsf{P}\left(\Gamma(p_2) \vDash \mathcal{Q}\right) - 1,$$

2. а) Докажите, что любое выпуклое свойство есть пересечение возрастающего и убывающего свойств.

   б) Докажите, что для любого нетривиального выпуклого свойства $\mathcal{Q}$ существуют пороговые вероятности $\widehat{p}_1 = \widehat{p}_1(n) \leq \widehat{p}_2 = \widehat{p}_2(n)$, удовлетворяющие соотношениям:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{P}(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}) = \begin{cases} 0, & \text{если } p = o(\widehat{p}_1); \\ 1, & \text{если } p = o(\widehat{p}_2) \text{ и } p = \omega(\widehat{p}_1); \\ 0, & \text{если } p = \omega(\widehat{p}_2). \end{cases}$$

3. Докажите лемму 1.

   Лемма 1. *Пусть $\mathcal{Q}$ — монотонное свойство подмножеств $\Gamma(n)$, $a \in [0,1]$ — фиксированная константа, а $m = m(n) \in \overline{[0,N]}$ — некоторая последовательность. Если для любой функции $p = p(n) \in [0,1]$ с условием $p = m/N + O\left(\sqrt{m(N-m)/N^3}\right)$ выполнено*

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right) \to a \textit{ при } n \to \infty,$$

   то

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \to a \textit{ при } n \to \infty.$$

4. Пусть $\mathcal{Q}$ — свойство подмножеств $\Gamma(n)$, $|\Gamma(n)| = N$. Докажите, что тогда для $p = m/N$ выполняется неравенство

$$\mathsf{P}\left(\Gamma(n,m) \vDash \mathcal{Q}\right) \leqslant 10\sqrt{m} \cdot \mathsf{P}\left(\Gamma(n,p) \vDash \mathcal{Q}\right).$$

5. 1) В случайном процессе $\widetilde{\Gamma} = (\widetilde{\Gamma}(m), m = 0, \ldots, N)$ для возрастающего свойства $\mathcal{Q}$ определим $m^*_{\mathcal{Q}} = \min\{m : \widetilde{\Gamma}(m) \vDash \mathcal{Q}\}$. Докажите, что $\widehat{m}$ является пороговой функцией для $\mathcal{Q}$ тогда и только тогда, когда $m^*_{\mathcal{Q}} = \Theta_{\mathsf{P}}(\widehat{m})$, т.е. для любой положительной функции $w(n) \to \infty$ выполнено

$$\mathsf{P}\left(\frac{1}{w(n)}\widehat{m} \leqslant m^*_{\mathcal{Q}} \leqslant w(n)\widehat{m}\right) \to 1.$$

   2) Докажите, что в равномерной модели случайных подмножеств для монотонного свойства $\mathcal{Q}$ существует точная пороговая функция тогда и только тогда, когда

$$\frac{m^*_{\mathcal{Q}}}{m(1/2; n)} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1.$$

6. Докажите, что в биномиальной модели случайных подмножеств для монотонного свойства $\mathcal{Q}$ существует точная пороговая функция тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ выполнено

$$\frac{p(\varepsilon; n)}{p(1/2; n)} \to 1.$$

СРОК СДАЧИ среда, 09 октября, до 10:00.

Решения принимаются в электронном виде, набранные в TeX (или как-то еще). Решения надо присылать на адрес dmitry.shabanov@phystech.edu