# Задачи по курсу случайных графов. Часть 2

1. Пусть $\Gamma(n) = \{1, \ldots, n\}$. Найдите пороговую вероятность в $\Gamma(n,p)$ для свойства содержать тройку $(x, y, z)$ — решение уравнения $x + y = z$.

2. Пусть $\Gamma(n) = \{1, \ldots, n\}$. Найдите пороговую вероятность в $\Gamma(n,p)$ для свойства содержать арифметическую прогрессию длины $k$.

3. Докажите следствие 1 из теоремы Прохорова.

   **Следствие 1.** *Пусть* $\{\mathsf{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность вероятностных мер на полном сепарабельном метрическом пространстве* $\mathcal{S}$*. Если она является плотной и любая ее слабо сходящаяся подпоследовательность слабо сходится к одной и той же вероятностной мере* $\mathcal{Q}$*, то* $\mathsf{P}_n \xrightarrow{w} \mathsf{Q}$*.*

4. Докажите теорему 1 о равномерной интегрируемости.

   **Теорема 1.** (о равномерной интегрируемости) *Пусть* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ *— неотрицательные случайные величины. Тогда* $\mathsf{E}\xi_n \to \mathsf{E}\xi$ *тогда и только тогда, когда* $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *равномерно интегрируема.*

5. Пусть $p \sim c \cdot n^{-k/(k-1)}$, $c > 0$ — фиксированная константа, а $X_k$ — это число деревьев фиксированного размера $k$ в $G(n,p)$. Докажите, что $X_k \xrightarrow{d} Pois(\lambda)$ при $n \to \infty$, где $\lambda = \frac{c^{k-1}k^{k-2}}{k!}$.

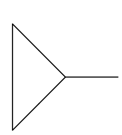
6. а) Пусть $G = C_3 \sqcup C_3$ — два непересекающихся треугольника, $pn \to c > 0$. Докажите, что тогда $X_G \xrightarrow{d} \frac{1}{2}Z(Z-1)$ при $n \to \infty$, где $Z \sim Pois(c^3/6)$.

   б) Пусть $G = C_3 \sqcup C_4$ — два непересекающихся цикла длины 3 и 4, $pn \to c > 0$. Докажите, что тогда $X_G \xrightarrow{d} Z_1 Z_2$, где $Z_1$ и $Z_2$ — независимы, $Z_1 \sim Pois(c^3/6)$, $Z_2 \sim Pois(c^4/8)$.

7. Пусть $I_n$ — число изолированных ребер в случайных графе $G(n,p)$. Обозначим $w(n) = 2pn - \ln n - \ln\ln n$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(I_n > 0) = \begin{cases} 0, & \text{если } p = o(n^2) \text{ или } w(n) \to \infty; \\ 1, & \text{если } p = \omega(n^2) \text{ и } w(n) \to -\infty. \end{cases}$$

8. Пусть $G = C_3 + K_2$ — треугольник с одной висячей вершиной,



Пусть $np \to c > 0$. Докажите, что

$$X_G \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{Z} W_i,$$

где $(W_i, i \in \mathbb{N})$ — независимые $Pois(3c)$ случайные величины, а $Z \sim Pois(c^3/6)$, также независимая с ними случайная величина.

**СРОК СДАЧИ** среда, 06 ноября, до 10:00.

Решения принимаются в электронном виде, набранные в TeX (или как-то еще).
Решения надо присылать на адрес dmitry.shabanov@phystech.edu