Задачи по курсу случайных графов. Часть 3

1. Пусть $p = c/n$, $c > 0, c \neq 1$. Обозначим через $L^{(t)}$ — размер максимальной древесной компоненты в $G(n,p)$. Вычислите такую $\gamma = \gamma(c)$, что
$$\frac{L^{(t)}}{\ln n} \xrightarrow{\mathsf{P}} \gamma \text{ при } n \to +\infty.$$

2. Пусть $np = w(n) \to +\infty$ при $n \to \infty$. Докажите, что с вероятностью, стремящейся к 1, в случайном графе $G(n,p)$ нет уницкликлических компонент.

3. Пусть $np \to c \in (0,1)$, а X_n — это общее число циклов в случайном графе $G(n,p)$. Найдите предельное распределение случайной величины X_n.

4. Пусть $np \to c$, $c > 1$. Обозначим через X_n — число ребер в гигантской компоненте $G(n,p)$. Найдите такую функцию $\theta = \theta(c) > 0$, что
$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathsf{P}} \theta \text{ при } n \to +\infty.$$

5. Пусть $np \to c, c > 1$. Докажите, что с вероятностью, стремящейся к 1, гигантская компонента является единственной сложной компонентой в случайном графе $G(n,p)$.

6. Пусть $c_1(n) \to 0$ — положительная функция, причем $c_1(n)n^{\frac{4}{15}} \to +\infty$. Пусть также $c_2(n) - c_1(n) \sim \beta\sqrt{2\pi}(c_1(n))^{5/2}$ для фиксированного $\beta > 0$. Обозначим через X_n — число древесных компонент случайного графа $G(\lambda)$ размера от $c_1(n)n^{2/3}$ до $c_2(n)n^{2/3}$. Докажите, что $X_n \xrightarrow{d} Pois(\beta)$.

7. Докажите, что в модели $G(\lambda)$ максимальный размер древесной компоненты имеет порядок $\Omega_{\mathsf{P}}(n^{2/3})$, т.е. для любой $w(n) \to 0$ в случайном графе найдется древесная компонента размера не меньше $n^{2/3}w(n)$.

8. Докажите, что функция $p = p(n) = 1/n$ является точной пороговой вероятностью для свойства планарности.

9. Пусть X_n — число циклов в случайном графе $G(\lambda)$. Докажите, что

   а) $\mathsf{E}X_n \sim \frac{1}{6}\ln n$ при $\lambda < 0$;

   б) $\mathsf{E}X_n \sim \frac{1}{4}\ln n$ при $\lambda = 0$;

10. Пусть X_n — число циклов в случайном графе $G(\lambda)$. Докажите, что $\mathsf{E}X_n \sim c(\lambda)n^{-1/6}\exp\{\lambda^2 n^{1/3}/2\}$ для некоторой постоянной $c(\lambda)$ при $\lambda > 0$.

СРОК СДАЧИ среда, 04 декабря, до 23:59.

Решения принимаются в электронном виде, набранные в TeX (или как-то еще). Решения надо присылать на адрес dmitry.shabanov@phystech.edu