О. Р. Мусин, МФТИ, Сентябрь 2020.
Мини-курс:
«Избранные задачи дискретной геометрии»

Основная цель этого курса представить несколько открытых проблем в активно развивающихся областях современной дискретной геометрии. Эти задачи могут быть выбраны студентами и магистрантами в качестве дипломных работ.

Занятие 1: **"Экстремальные конфигурации точек на сфере". 2.09.2020 (Среда)**

Одними из самых первых математических этюдов (etudes.ru) был этюд "Контактное число шаров и сферические коды ". В этом этюде разбирался вопрос Ньютона - Грегори (1694) о числе одинаковых бильярдных шаров, которые можно расположить в пространстве вокруг центрального шара того же радиуса? Несмотря на простую формулировку, эта задача оказалась довольно трудной и строгое доказательство того, что шаров не может быть больше 12 появилось только спустя 260 лет после постановки задачи. Обобщением этой задачи является **задача Таммеса** для сферы и тора (периодические упаковки кругов). На первом занятии мы разберем методы решения этих и близким к ним задач. обсудим новые подходы и открытые проблемы.

Занятие 2: **"Множества с двумя расстояниями".**

Мы обсудим множества точек в пространстве или на сфере, расстояния между которыми принимают не более чем два значения. Мы разберем вопрос о том, как много точек может иметь такое множество, а также какие конфигурации образуют точки из экстремальных наборов. На плоскости такое множество может состоять из пяти точек — вершин правильного пятиугольника. В трёхмерном пространстве максимальная мощность (размер) таких множеств равна шести и оказывается, что имеется шесть различных (не изометричных) конфигураций. Недавно получен значительный прогресс по максимальной мощности сферических множеств с двумя расстояниями. Я также расскажу о теории Эйнхорна-Шёнберга, о классификации с помощью нее всех множеств с двумя расстояниями на плоскости и в пространстве, а также о ряде открытых проблем в этой области.

Занятие 3: **"Поризм Штейнера, теорема Декарта и их обобщения"**

Знаменитый **поризм Штейнера** утверждает, что если цепочка окружностей, каждая из которых касается двух соседних и двух данных непересекающихся окружностей замкнется, то замкнется любая такая цепочка, независимо от выбора первой окружности. **Теорема Декарта** утверждает, что для любых четырёх взаимно касающихся окружностей радиусы окружностей удовлетворяют некоторому квадратному уравнению. На этом занятии будут перечислены все случаи, когда имеет место многомерный аналог поризма Штейнера.

Обобщением теоремы Декарта для n-мерного пространства и n+2 шаров является **теорема Содди-Госсе.** Интересно и для других случаев найти аналоги теоремы Декарта.

Занятие 4: **"Гипотеза Римана, теорема Рамануджана и сверхизбыточные числа"**

Имеется довольно много эквивалентных формулировок гипотезы Римана. Среди них выделяются "элементарные" (т.е. понятные даже школьникам) формулировки, принадлежащие Г. Робину (1984) и Дж. Лагариасу (2002). Этот подход восходит к работе Рамануджана (1915) по сверхсоставным числам. В докладе будет рассказано о теореме Рамануджана для колоссально-составных чисел и ее обобщении на основе выпуклой оболочки функции делителей. Свойства сверхизбыточных чисел разительно отличаются в зависимости от того верна или нет гипотеза Римана. Мы также рассмотрим открытые вопросы по этой теме, в частности задачу о константе Рамануджана в решении которой может помочь численный эксперимент.

Занятие 5: **" Сбалансированные подмножества и обобщения теоремы Шепли"**

Теорема KKMS о существовании сбалансированных подмножеств является обобщением леммы Кнастера-Куратовского-Мазуркевича (ККМ) по Ллойду Шепли. Этот результат применяется в математической экономике и кооперативной теории игр. Недавно я нашел обобщение теоремы KKMS для произвольного конечного множества V в n-мерном евклидовом пространстве. В этом случае подмножество V называется сбалансированным, если его выпуклая оболочка содержит центр масс множества V. Интересным вопросом для изучения является классификация сбалансированных подмножеств для различных V (например, n-мерных кубов и других выпуклых многогранников), разработка алгоритмов их поиска для обобщенной теоремы Шепли и применения в теории игр.

Занятие 6: **"Экстремальные конфигурации сфер и разбиение Делоне"**

На этом занятии мы разберем несколько открытых задач, связанных с триангуляцией Делоне.