

# Теория узлов

Дисциплина состоит из лекции и упражнений. На каждой лекции приводятся задачи и упражнения.

**Аннотация.** Данный курс представляет собой обзор современной теории узлов и ее связей с маломерной и алгебраической топологией. С полными доказательствами приводятся ключевые теоремы теории узлов, строятся скейн-инварианты, теория линк-гомотопий Милнора, инварианты Васильева (и интеграл Концевича), теория гомологий Хованова и гомологий Хегора-Флоера, обсуждаются квантовые инварианты узлов и инварианты трехмерных многообразий. Приводятся алгоритмы распознавания кос и трехмерных кос. Каждая лекция курса снабжена подборкой задач - от упражнений до нерешенных проблем маломерной топологии.

На осеннем семестре 2020-2021 уч. г.

Лекция 1. Узлы, движения Рейдемейстера. Коэффициент зацепления, Инвариант раскрасок.

Лекция 2. Скобка Кауфмана, Полином Джонса

Лекция 3. Теорема Кауфмана-Мурасуги

Лекция 4. Инвариант раскрашенных узлов.

Лекция 5. Фундаментальная группа дополнения

Лекция 6. Квандл. Полный инвариант.

Лекция 7. Группа кос. Геометрическое определение, Топологическое определение, Алгебро-геометрическое определение. Теоремы Маркова и Александера.

Лекция 8-9. Инварианты Куперберга и Хомфли. Скобка с метками

Лекция 10-11. Инварианты Васильева. Все предыдущие через них выражаются

Лекция 12. Алгебра хордовых диаграмм

Лекция 13. Интеграл Концевича.

Лекция 14-15. Определение линк-гомотопии, Инвариант относительно линк-гомотопии

На весеннем семестре 2020-2021 уч. г.

1-2. Гомологии Хованова

3. Инвариант Расмуссена.

4. Инварианты Хегора-Флоера

5. Диаграмма Хегора

6-7. Лежандровы узлы. Инварианты Чеканова. ДГА.

8. Атомы, d-диаграммы

9-10. Виртуальные узлы, Инвариантные полиномы виртуальных узлов

11-12. Свободные узлы, Четность, Скобки

13. Определение биквандла, инвариант раскрасок цветами из биквандла

14-15. Инварианты узлов со значениями в картинках.

## Список литературы

### Основные литературы:

Мантуров В. О. Теория узлов, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005 г.  
V. O. Manturov Knot theory: Second edition CRC press 560 April 4, 2018 (на английском)

### Дополнительные литературы:

V.O. Manturov, D.P. Ilyutko, Virtual Knots. The State of the Art, Series on Knots and Everything: Volume 51, World Scientific, 2012.

Мантуров В. О. Элементарное доказательство вложимости классических кос в виртуальные косы, Доклады Академии наук, 2016 .- Т. 469 , № 5 .- С. 535 - 538

V.O. Manturov, D.P. Ilyutko, Picture-valued parity-biquandle bracket, Journal of Knot Theory and Its Ramifications Vol. 29, No. 02, 2040004 (2020)

N. Habegger, X-S Lin, The classification of links up to link-homotopy, Journal of American Mathematical Society, Vol. 3, Number 2, April 1990

Manturov V.O., "Parity and projection from virtual knots to classical knots", *J. Knot Theory Ramifications*, **22**:9 (2013), 1350044, 20 pp

## Контрольная работа (пример)

Вычислить число раскрасок в три цвета для трилистника. Показать, что трилистник нетривиален. Построить минимальную диаграмму узла с 13 перекрестками.

Вычислить скобку Кауфмана (и полином Джонса) для восьмёрки.

Вычислить фундаментальные группы тора

Вычислить количество правильных раскрасок квандром  $(Z_{\{5\}}, *)$ ,  $a*b = 2b - a$  для трилистника и восьмерки.

## Контроль по семестру (пример)

Вычислить коэффициент зацепления для Уайтхеда.

Проверить, что при замене проходов на переходы в скобке Кауфмана происходит замена  $a \rightarrow$

Посчитать скобку Кауфмана для левого трилистника.

Посчитать инвариант Конвея для восьмерки.

Найти представление фундаментальной группы правого трилистника.

Вычислить определитель узлов для  $5_1$ . Уточнить, что для какого простого числа  $p$  можно нетривиально раскрасить узел  $5_1$  квандром  $(Z_{\{p\}}, *)$ ,  $a*b = 2b - a$ .

Сформулировать теорему Александра и теорему Маркова. Преобразовать данную диаграмму в форму косы.

Вычислить примитивные элементы для алгебры хордовых диаграмм, в которых есть одночленные соотношения, для порядков 2 и 3.