Алгебраическая теория чисел

профессор Б.З. Мороз

Предварительные знания: общий курс алгебры (группы, кольца, поля), линейная алгебра.

План спецкурса.

1. Введение (основные понятия и результаты).
2. Кольцо целых алгебраических чисел; группа единиц; конечность группы классов идеалов.
3. Локальные поля.
4. Дифферента и дискриминант; группы ветвления.
5. Круговые поля и теория полей классов.

Контрольные вопросы.

1. Привести несколько примеров одноклассных полей.
2. Описать идеалы кольца матриц $M_n(\mathbb{Z}), n \in \mathbb{N}$.
3. Описать идеалы произвольного поля.
4. Является ли кольцо полиномов $k[x_1, x_2]$ от двух переменных с коэффициентами из некоторого поля k дедекиндовым кольцом?
5. Является ли кольцо

$$\{a + b\,\sqrt{-3}\,|\{a, b\} \subseteq \mathbb{Z}\}$$

дедекиндовым кольцом?
6. Привести пример конечного несепарабельного расширения полей.
7. Доказать основную теорему теории Галуа.
8. Доказать лемму Минковского о выпуклом теле.
9. Доказать аналог китайской теоремы об остатках для произвольного коммутативного кольца.
10. Описать закон разложения в круговых полях.

Аннотация. В этом курсе изучается арифметика конечных расширений поля рациональных чисел. Напомнив основные свойства групп, полей и колец, мы доказываем, что кольца целых элементов таких полей суть дедекиндовы кольца, и формулируем основные теоремы (конечность группы классов идеалов, теорема Дирихле о единицах, теоремы о поведении делителей дискриминаанты), доказательство которых является целью этого спецкурса.

Список литературы

[1] З.И. Боревич и И.Р. Шафаревич, *Теория чисел,* Москва, 1985.

[2] А. Вейль, *Основы теории чисел,* Москва, 1972.

[3] С. Ленг, *Алгебраические числа,* Москва, 1966.

[4] Э. Гекке, *Лекции по теории алгебраических чисел,* Москва-Ленинград, 1940.

Примечание. Это годовой спецкурс (с экзаменом в конце курса и дифференцированным зачётом в конце первого семестра).