Задачи-1

Задача 1. Найдите $m(2)$ и $m(3)$.

Задача 2. Найдите как можно более точные оценки для $m(4)$.

Задача 3. Скажем, что гиперграф обладает свойством B_k, если его вершины можно так покрасить в два цвета, что каждое его ребро содержит не менее k вершин каждого из цветов. Пусть $m_k(n)$ — минимальное число ребер в n-однородном гиперграфе, который не обладает свойством B_k. С помощью вероятностного метода найдите какие-нибудь верхние и нижние оценки величины $m_k(n)$.

Задача 4. Найдите $m_2(4)$, $m_2(5)$, $m_3(6)$, $m_3(7)$.

Задача 5. Придумайте оценки для $m_k(2k)$ и $m_k(2k+1)$.

Задача 6. Пусть $n \geqslant 4$ и $H = (V, E)$ — n-однородный гиперграф с $|E| < \frac{4^{n-1}}{3^n}$. Докажите, что существует раскраска вершин H в четыре цвета, при которой в каждом ребре есть все цвета.

Задача 7. Найдите $R(3,3)$ и $R(3,4)$.

Задача 8. Пусть $R(3,3,3)$ — это минимальное n, такое, что при любой раскраске ребер K_n в красный, желтый и зеленый цвета найдется одноцветный треугольник. Вычислите $R(3,3,3)$.

Задача 9. Пусть $R(k,l,m)$ — естественное обобщение для $R(3,3,3)$. Напишите какое-нибудь рекуррентное неравенство, доказывающее, что величина $R(k,l,m)$ всегда корректно определена.

Задача 10. Пусть $R_k(l_1, \ldots, l_r)$ — минимальное число n, такое, что при любой раскраске ребер полного k-однородного гиперграфа на n вершинах в r цветов найдется $i \in \{1, \ldots, r\}$ и такое l_i-элементное множество вершин, что все ребра нашего полного гиперграфа, содержащиеся в этом множестве, покрашены в i-ый цвет. Докажите корректность данного определения.

Задача 11. С помощью вероятностного метода найдите нижнюю оценку для $R_3(s,s)$.

Задача 12. Найдите верхнюю оценку для $R_3(s,s)$ (с помощью рекуррентных неравенств).

Задача 13. Пусть $p \in [0,1]$ таково, что

$$C_n^s p^{C_s^2} + C_n^t (1-p)^{C_t^2} < 1$$

(здесь $n, s, t \in \mathbb{N}$). Докажите, что тогда $R(s,t) > n$ и, в частности, $R(4,t) > \frac{ct^{3/2}}{(\ln t)^{3/2}}$ при некотором $c > 0$.

Задача 14. С помощью "альтернирования" докажите, что $R(4,t) > \frac{ct^2}{(\ln t)^2}$ при некотором $c > 0$.