Задачи-2

Задача 1. С помощью локальной леммы Ловаса найдите как можно лучшую нижнюю оценку для $R(4,t)$.

Задача 2. Игральная кость брошена два раза. Пусть X_1, X_2 — количества очков, выпавших при этих испытаниях. Рассмотрим события

$$A_1 = \{2|X_1, 3|X_2\},\ \ A_2 = \{3|X_1, 2|X_2\},\ \ A_3 = \{X_2|X_1\}.$$

Здесь $a|b$ означает "a делит b". Перечислите все орграфы зависимостей для событий A_1, A_2, A_3.

Задача 3. Рассмотрим 8-однородный гиперграф, степень каждой вершины которого не превосходит 120. Докажите, что его вершины можно так раскрасить в 4 цвета, чтобы никакое его ребро не было одноцветным.

Задача 4. Обозначим через $W(k)$ минимальное натуральное число, такое, что при любой раскраске чисел $1, 2, \ldots, W(k)$ в два цвета найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины не меньше k. Докажите, что $W(k) > \frac{2^k}{2ek}$.

Задача 5. Обозначим через X число треугольников в случайном графе $G(n,p)$. Как ведет себя величина X при a) $\ p = o\left(\frac{1}{n}\right)$, b) $\ p \sim \frac{c}{n}$, $c = \mathrm{const}$, c) $\ p = \omega\left(\frac{1}{n}\right)$?

Задача 6. Докажите, что при $p = \frac{c}{n}$ и $c < 1$ выполнено утверждение: для любой функции $\omega(n) \to \infty$ п.н. $\geq n - \omega(n)$ вершин случайного графа $G(n,p)$ принадлежат древесным компонентам, а все остальные $\leq \omega(n)$ вершин лежат в унициклических компонентах.

Задача 7. Докажите формулу $\frac{1}{2}n^{n-1}\sum\limits_{r=3}^{n}\prod\limits_{j=1}^{r-1}\left(1 - \frac{j}{r}\right)$ и ее асимптотику $\sqrt{\frac{\pi}{8}}n^{n-0.5}$ для числа унициклических графов на n вершинах.

Задача 8. С помощью асимптотики из задачи 7 выделите те $p = p(n)$, для которых случайный граф почти наверное не содержит унициклических компонент данного размера k.

Задача 9. Назовем граф *n-мерным дистанционным*, если его вершины — точки в $\mathbb{R}^n$, а ребра — отрезки длины 1, соединяющие пары вершин. а) Докажите, что при $p = o(1/n)$ случайный граф почти наверное изоморфен дистанционному графу на плоскости. б) Докажите, что то же самое верно для $p = c/n$ при любом $c < 1$. в) Докажите, что при $p > 50/n$ случайный граф почти наверное не изоморфен никакому дистанционному графу на плоскости. г) Докажите, что то же самое верно при $p = c/n$, $c > 1$.