Некоторые задачи по дискретным группам отражений

Богачев Николай Владимирович

ассистент кафедры дискретной математики ФИВТ МФТИ,
научный сотрудник лаборатории продвинутой комбинаторики и сетевых приложений.

См. личную страницу с публикациями, докладами и проектами:
https://nvbogachev.netlify.com/

1. Группы отражений и многогранники Кокстера

Пусть $\mathbb{X}^n$ — одно из трех пространств постоянной кривизны, то есть либо евклидово пространство $\mathbb{E}^n$, либо n-мерная сфера $\mathbb{S}^n$, либо n-мерное (гиперболическое) пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$.

Рассмотрим выпуклый многогранник P в пространстве $\mathbb{X}^n$. Если мы подействуем на P отражениями в гиперплоскостях его граней, то может получиться так, что образы этого многогранника покроют всё пространство $\mathbb{X}^n$ и не будут попарно пересекаться. В таком случае мы будем говорить, что такие преобразования порождают *дискретную группу отражений* Γ, а многогранник P является *фундаментальным многогранником* для Γ. Если многогранник P является *ограниченным (или, эквивалентно, компактным)*, то группа Γ называется *кокомпактной группой отражений*, если же многогранник P имеет *конечный объём*, то группа Γ называется *коконечной* или дискретной группой *конечного кообъёма*.

Какие свойства характеризуют такие многогранники P? Например, всякие две гиперплоскости H_i и H_j, ограничивающие P, либо не пересекаются, либо образуют двугранный угол, равный π/n_{ij}, где $n_{ij} \in \mathbb{Z}$, $n_{ij} \geq 2$.

Такие многогранники называют *многогранниками Кокстера*, поскольку дискретные группы отражений (значит, и их фундаментальные многогранники) для $\mathbb{X}^n = \mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n$ были определены и найдены Г. Кокстером в 1933 году (см. работу [1]). Группы, порождённые отражениями, также часто называют *группами Кокстера*.

В 1967 году (см. [2]) Э. Б. Винбергом была разработана теория дискретных групп, порождённых отражениями в пространствах Лобачевского. В этой статье он предложил новые методы исследований гиперболических групп отражений, в частности, описание таких групп в виде схем Кокстера-Винберга.

2. Арифметические группы отражений (рефлективные гиперболические решётки)

Определение 1. *Пусть $\mathbb{F}$ — вполне вещественное поле алгебраических чисел, и пусть A — его кольцо целых. Квадратичная форма*

$$f(x) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{F}$$

сигнатуры $(n, 1)$ называется допустимой, если при всяком нетождественном вложении $\sigma\colon \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ форма

$$f^{\sigma}(x) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}^{\sigma} x_i x_j$$

является положительно определённой.

Рассмотрим $(n+1)$-мерное вещественное *пространство Минковского* $\mathbb{E}^{n,1}$ со скалярным произведением, заданным квадратичной формой f. Группа $\Gamma = O'(f, A)$ целочисленных линейных преобразований, сохраняющих форму f и отображающих на себя каждую связную компоненту конуса $\{v \in \mathbb{E}^{n,1} \mid f(v) < 0\} = \mathfrak{C}^+ \cup \mathfrak{C}^-$, является дискретной группой движений пространства Лобачевского. Здесь подразумевается векторная модель $\mathbb{H}^n$, заданная квадратичной формой f как множество лучей в выпуклом открытом конусе $\mathfrak{C}^+$, проходящих через начало координат, то есть $\mathbb{H}^n = \mathfrak{C}^+/\mathbb{R}^+$, а группа движений $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) = O'(n, 1)$ — группа псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{E}^{n,1}$.

Из общей теории арифметических дискретных групп известно, что если $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ и форма представляет нуль, то факторпространство $\mathbb{H}^n/\Gamma$ некомпактно, но имеет конечный объём (в таком случае говорят, что Γ — *решётка*, то есть *дискретная подгруппа конечного кообъёма*), а во всех остальных случаях оно компактно.

Определение 2. *Группы Γ, полученные указанным выше способом, и все соизмеримые с ними дискретные подгруппы группы $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ называются арифметическими дискретными группами (гиперболическими решётками) простейшего типа. Поле $\mathbb{F}$ называется полем определения группы Γ (и всех групп, соизмеримых с ней).*

Обозначим через $O_r(f, A)$ подгруппу группы $O'(f, A)$, порождённую всеми содержащимися в ней отражениями.

Определение 3. *Квадратичная форма f называется рефлективной, если индекс $[O'(f, A) : O_r(f, A)]$ конечен. В этом случае соответствующая гиперболическая решётка также называется рефлективной.*

Определение 4. *Дискретная группа отражений конечного кообъёма называется арифметической с полем определения $\mathbb{F}$ (или $\mathbb{F}$-арифметической), если она содержится в качестве подгруппы конечного индекса в группе вида $O'(f, A)$, где f — допустимая квадратичная форма над вполне вещественным полем $\mathbb{F}$.*

Теперь мы сформулируем несколько фундаментальных теорем о существовании арифметических групп отражений и кокомпактных групп отражений в пространствах Лобачевского.

Теорема 1. *(Э. Б. Винберг, 1984, см.* [3]*)*

(1) *Компактные многогранники Кокстера отсутствуют в пространствах Лобачевского $\mathbb{H}^n$ при $n \geq 30$.*
(2) *Арифметические группы отражений отсутствуют в пространствах Лобачевского $\mathbb{H}^n$ при $n \geq 30$.*

Теорема 2. *(В. В. Никулин, 2007, см.* [4]*)*
В каждой размерности $n \geq 2$ существует лишь конечное с точностью до подобия число максимальных арифметических групп отражений в пространствах $\mathbb{H}^n$.

Данные результаты дают надежду на то, что все арифметические группы отражений можно классифицировать.

3. Открытые проблемы

Проблема 1. *Нахождение новых гиперболических групп отражений конечного кообъёма, в частности, групп отражений в пространствах $\mathbb{H}^n$ достаточно высоких размерностей (арифметических и неарифметических).*

Проблема 2. *До сих пор открыт вопрос, какова максимальная размерность пространства Лобачевского, в котором существует компактный многогранник Кокстера? Аналогичный вопрос открыт и для многогранников Кокстера конечного объёма.*

Проблема 3. *Классификация групп отражений, в частности, классификация с точностью до подобия всех максимальных арифметических групп отражений.*

Замечание 1. *Вопросы нахождения новых групп отражений и их классификация фактически поставлены в той самой работе Э. Б. Винберга 1967 года. Дальнейшие результаты 70-80-х годов прошлого века (а также и недавние результаты) лишь подтверждают, что есть надежда на решение этих проблем.*

Хорошим инструментом для решения проблемы 1 является алгоритм Винберга (1972 год, см. [5]) построения фундаментального многогранника для гиперболической группы отражений. Практически он эффективен для арифметических групп отражений.

Проблема 4. *Компьютерная реализация алгоритма Винберга для $\mathbb{F}$-арифметических групп отражений с полем $\mathbb{F} \neq \mathbb{Q}$.*

4. Известные результаты и частичные продвижения

4.1. **Проблема 1.** Как было сказано выше, хороший инструмент здесь — алгоритм Винберга. Также есть серия (в том числе и недавних) работ о построении неарифметических групп отражений.

4.2. **Проблема 2.** Рекордный пример компактного многогранника Кокстера был найден В. О. Бугаенко при $n = 8$, хотя сама максимально возможная размерность ограничена неравенством $n \leq 29$.

Рекордный пример многогранника Кокстера конечного объёма принадлежит Р. Борчердсу в размерности $n = 21$. При этом известно, что многогранники Кокстера конечного объёма могут существовать при $n < 996$.

Оба этих примера пришли из арифметических групп отражений. Пример Бугаенко найден для некоторой арифметической группы отражений над полем $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ в пространстве $\mathbb{H}^8$, а пример Борчердса является фундаментальным многогранником для гиперболической рефлективной решётки ранга 22, то есть арифметической группы отражений над полем $\mathbb{Q}$ в пространстве $\mathbb{H}^{21}$.

4.3. **Проблема 3.** Что касается третьей проблема, то она тоже далека от завершения. Эффективное описание всех дискретных групп отражений в пространствах $\mathbb{H}^n$ получено лишь при $n = 2$ (работы Фрике и Клейна) и при $n = 3$ (знаменитые теоремы Е. М. Андреева 1970 года).

В классификации арифметических групп отражений достигнуты более существенные успехи. Над полем определения $\mathbb{Q}$ максимальные арифметические группы отражений классифицированы с точностью до подобия при $n = 2, 4, 5$ и для некомпактного случая при $n = 3$.

Также получена классификация арифметических групп отражений с полем определения $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ в плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$.

Во всех остальных случаях проблема 3 остаётся до сих пор открытой.

4.4. **Проблема 4.** Как было сказано выше, алгоритм Винберга является эффективным способом построения фундаментальных многогранников для арифметических групп отражений.

Попытки реализовать на компьютере алгоритм Винберга предпринимались с 80-х годов прошлого века, но все они ограничивались решётками частного вида, как правило, задаваемыми диагональными квадратичными формами.

Единственной известной до недавнего времени реализацией, опубликованной вместе с подробной документацией, является программа Р. Гульельметти 2016 года[1], работающая с решётками, заданными диагональными квадратичными формами, инвариантные множители которых свободны от квадратов. Эта программа работает достаточно эффективно во всех размерностях, где существуют рефлективные решётки.

В 2017 году мы совместно с А. Ю. Перепечко написали программу алгоритма Винберга для произвольных гиперболических решёток с полем определения $\mathbb{Q}$. Программа опубликована в Интернете (см. [6]), её подробное описание доступно в статье [7]. Программа была проверена на значительном количестве известных рефлективных гиперболических решёток.

Рекомендуются к прочтению обзоры Э.Б. Винберга 1985 года (см. [8]) и М. Белолипецкого 2016 года (см. [9]). Более свежие результаты доказаны или перечислены в работах [10, 11]

Список литературы

[1] H. S. M. Coxeter. Discrete groups generated by reflections, — Ann. of Math. (2), 35:3 (1934), 588–621.

[2] Э. Б. Винберг. Дискретные группы, порожденные отражениями, в пространствах Лобачевского. — Матем. сб., 1967, том 72(114), номер 3, с. 471 — 488.

[3] Э. Б. Винберг. Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности. — Труды ММО, 1984, Т. 47, с. 68 — 102.

[4] В.В. Никулин. Конечность числа арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского. — Изв. РАН. Сер. матем., 2007, Т. 71, выпуск 1, с. 55 — 60.

[5] Э. Б. Винберг. О группах единиц некоторых квадратичных форм. — Мат. сб., 1972, 87, с. 18 — 36

[6] N. Bogachev, A. Perepechko, Vinberg's Algoritm, https://github.com/aperep/vinberg-algorithm

[7] Н. В. Богачев, А. Ю. Перепечко. Алгоритм Винберга для гиперболических решёток. — Математические заметки, 2018, (в печати).

[8] Э. Б. Винберг. Гиперболические группы отражений. — УМН, 1985, 40:1, с. 29 — 66.

[9] Mikhail Belolipetsky. Arithmetic hyperbolic reflection groups. — Bulletin (New Series) of the Amer. Math. Soc., 2016, Vol. 53 (3), p. 437 — 475.

[10] Н. В. Богачев. Рефлективные анизотропные гиперболические решетки ранга 4. — УМН, 2017, том 72, выпуск 1, стр. 193—194.

[11] Н. В. Богачев. Классификация $(1,2)$-рефлективных анизотропных гиперболических решёток ранга 4. — Известия РАН, Серия матем., 2018 (в печати).

[1]см. https://rgugliel.github.io/AlVin