Некоторые задачи по дискретным группам отражений

Богачев Николай Владимирович

ассистент кафедры дискретной математики
научный сотрудник лаборатории продвинутой комбинаторики и сетевых приложений
ФИВТ МФТИ

См. личную страницу с публикациями, докладами и проектами: https://nvbogachev.netlify.com/

1. Группы отражений и многогранники Кокстера

Пусть $\mathbb{X}^n$ — одно из трех пространств постоянной кривизны, то есть либо евклидово пространство $\mathbb{E}^n$, либо n-мерная сфера $\mathbb{S}^n$, либо n-мерное (гиперболическое) пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$.

Рассмотрим выпуклый многогранник P в пространстве $\mathbb{X}^n$. Если мы подействуем на P группой Γ, порождённой отражениями в гиперплоскостях его граней, то может получиться так, что образы этого многогранника при действии разными элементами группы Γ покроют всё пространство $\mathbb{X}^n$ и не будут иметь попарно общих внутренних точек. В таком случае мы будем говорить, что группа Γ является *дискретной группой отражений*, а многогранник P является её *фундаментальным многогранником*. Если многогранник P является *ограниченным (или, эквивалентно, компактным)*, то группа Γ называется *кокомпактной группой отражений*, если же многогранник P имеет *конечный объём*, то группа Γ называется *коконечной* или дискретной группой *конечного кообъёма*.

Какие свойства характеризуют фундаментальные многогранники P для дискретных групп отражений? Например, всякие две гиперплоскости H_i и H_j, ограничивающие P, либо не пересекаются, либо образуют двугранный угол, равный π/n_{ij}, где $n_{ij} \in \mathbb{Z}$, $n_{ij} \geq 2$.

Такие многогранники называют *многогранниками Кокстера*, поскольку дискретные группы отражений (значит, и их фундаментальные многогранники) для $\mathbb{X}^n = \mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n$ были определены и найдены Г. Кокстером в 1933 году (см. работу [2]).

В 1967 году (см. [3]) Э. Б. Винберг разработал теорию дискретных групп, порождённых отражениями в пространствах Лобачевского. Он предложил новые методы исследований гиперболических групп отражений, в частности, описание таких групп в виде схем Кокстера-Винберга, сформулировал и доказал критерий арифметичности для групп отражений и привел ряд различных примеров.

2. Арифметические группы отражений (рефлективные гиперболические решётки)

Пусть $\mathbb{F}$ — вполне вещественное поле алгебраических чисел, A — кольцо его целых элементов. Для удобства будем считать, что оно является кольцом главных идеалов.

***Определение* 2.1.** *Свободный конечно-порождённый A-модуль L, снабжённый скалярным умножением $(\cdot\,,\cdot)$ сигнатуры $(n,1)$ со значениями в A, называется гиперболической решёткой, если для всякого нетождественного вложения $\sigma: \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ квадратичное пространство $L \otimes_{\sigma(A)} \mathbb{R}$ положительно определено.*

Пусть L — гиперболическая решётка. Тогда векторное пространство $\mathbb{E}^{n,1} = L \otimes_{\mathrm{id}} \mathbb{R}$ является $(n+1)$-мерным вещественным *пространством Минковского*. Группа $\Gamma = \mathcal{O}'(L)$ целочисленных (то есть с коэффициентами из A) линейных преобразований, сохраняющих решётку L и отображающих на себя каждую связную компоненту конуса

$$\mathfrak{C} = \{v \in \mathbb{E}^{n,1} \mid (v,v) < 0\} = \mathfrak{C}^+ \cup \mathfrak{C}^-,$$

является дискретной группой движений *пространства Лобачевского*. Здесь подразумевается *векторная модель* пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$, заданная как множество точек гиперболоида

$$\{v \in \mathbb{E}^{n,1} \mid (v,v) = -1\},$$

лежащих внутри конуса $\mathfrak{C}^+$. Группа движений $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) = \mathcal{O}'_{n,1}(\mathbb{R})$ есть группа псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{E}^{n,1}$, оставляющая на месте конус $\mathfrak{C}^+$.

Из общей теории арифметических групп известно, что если $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ и решётка L изотропна (то есть ассоциированная с ней квадратичная форма представляет нуль), то факторпространство $\mathbb{H}^n/\Gamma$ (то есть фундаментальная область группы Γ) некомпактно, но имеет конечный объём (в таком случае говорят, что Γ — *дискретная подгруппа конечного кообъёма*), а во всех остальных случаях оно компактно.

***Определение* 2.2.** *Две подгруппы Γ_1 и Γ_2 какой-либо группы называются соизмеримыми, если группа $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ является подгруппой конечного индекса в каждой из них.*

***Определение* 2.3.** *Группы Γ, полученные указанным выше способом, и все соизмеримые с ними дискретные подгруппы группы* $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ *называются арифметическими дискретными группами простейшего типа. Поле $\mathbb{F}$ называется полем определения (или основным полем) группы Γ (и всех групп, соизмеримых с ней).*

Примитивный вектор $e \in L$ называется *корнем* или, более точно, *k-корнем*, где $k = (e,e) > 0$, если $2(e,x) \in kA$ для всех $x \in L$. Всякий корень e определяет *ортогональное отражение* (называемое *k-отражением*, где $k = (e,e)$) в пространстве $\mathbb{E}^{n,1} = L \otimes_{\mathrm{id}} \mathbb{R}$

$$\mathcal{R}_e : x \mapsto x - \frac{2(e,x)}{(e,e)}e,$$

которое сохраняет решётку L. Отражение $\mathcal{R}_e$ определяет отражение в пространстве $\mathbb{H}^n$ относительно гиперплоскости

$$H_e = \{x \in \mathbb{H}^n \mid (x,e) = 0\},$$

называемой *зеркалом* отражения $\mathcal{R}_e$.

Обозначим через $\mathcal{O}_r(L)$ подгруппу группы $\mathcal{O}'(L)$, порождённую всеми содержащимися в ней отражениями.

***Определение* 2.4.** *Гиперболическая решётка L называется рефлективной, если индекс $[\mathcal{O}'(L) : \mathcal{O}_r(L)]$ конечен.*

***Определение* 2.5.** *Число $k \in A$, $k > 0$, называется устойчивым, если $k \mid 2$ в кольце A.*

Например, при $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Z}$, это определение выполняется при $k \leqslant 2$. А при $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ и $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ устойчивыми будут числа 1, 2 и $2 + \sqrt{2}$ (с точностью до умножения на обратимый элемент кольца).

***Определение* 2.6.** *Отражение R_e называется устойчивым, если число (e,e) устойчиво.*

Пусть L — гиперболическая решётка над кольцом целых A. Обозначим через $S(L)$ подгруппу группы $\mathcal{O}'(L)$, порождённую устойчивыми отражениями.

***Определение* 2.7.** *Гиперболическая решётка L называется устойчиво рефлективной, если индекс* $[\mathcal{O}'(L) : S(L)]$ *конечен.*

***Замечание* 1.** *В своих статьях [11] и [12] устойчиво рефлективные решетки над* $\mathbb{Z}$ *я называю* (1,2)*-рефлективными, поскольку для* $A = \mathbb{Z}$ *только числа* 1 *и* 2 *являются устойчивыми.*

***Теорема* 2.1.** *(Э. Б. Винберг, 1967, см. [3])*

Дискретная группа отражений конечного кообъёма является арифметической группой отражений с полем определения $\mathbb{F}$ *(или* $\mathbb{F}$*-арифметической), если она содержится в качестве подгруппы конечного индекса в группе вида* $\mathcal{O}'(L)$*, где* L *— какая-то (автоматически рефлективная) гиперболическая решетка над вполне вещественным полем* $\mathbb{F}$*.*

Теперь мы сформулируем несколько фундаментальных теорем о существовании арифметических групп отражений и кокомпактных групп отражений в пространствах Лобачевского.

***Теорема* 2.2.** *(Э. Б. Винберг, 1984, см. [4])*

1. *Компактные многогранники Кокстера отсутствуют в пространствах Лобачевского* $\mathbb{H}^n$ *при* $n \geq 30$.
2. *Арифметические группы отражений отсутствуют в пространствах Лобачевского* $\mathbb{H}^n$ *при* $n \geq 30$.

Следующий важный результат принадлежит сразу нескольким авторам.

***Теорема* 2.3.** *Для каждого* $n \geq 2$ *существует лишь конечное с точностью до подобия число рефлективных гиперболических решёток сигнатуры* $(n, 1)$*. Аналогично, для каждого* $n \geq 2$ *существует лишь конечное с точностью до сопряжения число максимальных арифметических групп отражений в пространствах* $\mathbb{H}^n$*.*

Доказательство этой теоремы разбивается на следующие этапы:

- 1980, 1981 — В. В. Никулин доказал конечность числа максимальных арифметических групп отражений в пространствах $\mathbb{H}^n$ при $n \geq 10$;
- 2005 — Д. Д. Лонг, К. Маклахлан и А. В. Рид доказали конечность числа максимальных арифметических групп отражений в размерности $n = 2$;
- 2005 — И. Агол доказал конечность в размерности $n = 3$;
- 2007 — В. В. Никулин по индукции доказал конечность в оставшихся размерностях $4 \leq n \leq 9$, см. [5];
- 2008 — И. Агол, М. В. Белолипецкий, П. Сторм и К. Уайт независимо провели доказательство теоремы конечности для всех размерностей с помощью спектрального метода, см. [1] (см. также недавний обзор [10] М. В. Белолипецкого)

Наложив дополнительные ограничения на поле определения $\mathbb{F}$, можно получить более строгие оценки в пункте 2 теоремы 2.2.

Данные результаты дают надежду на то, что все рефлективные гиперболические решётки, а также и максимальные арифметические группы отражений можно классифицировать.

3. Открытые проблемы

3.1. Глобальные проблемы

Проблема 1. *Нахождение новых гиперболических групп отражений конечного кообъёма, в частности, групп отражений в пространствах $\mathbb{H}^n$ достаточно высоких размерностей (арифметических и неарифметических).*

Проблема 2. *До сих пор открыт вопрос, какова максимальная размерность пространства Лобачевского, в котором существует компактный многогранник Кокстера? Аналогичный вопрос открыт и для многогранников Кокстера конечного объёма.*

Проблема 3. *Классификация групп отражений, в частности, классификация с точностью до подобия всех рефлективных гиперболических решеток.*

Замечание 2. *Вопросы нахождения новых групп отражений и их классификация фактически поставлены в той самой работе Э. Б. Винберга 1967 года. Дальнейшие результаты 70-80-х годов прошлого века (а также и недавние результаты) лишь подтверждают, что есть надежда на решение этих проблем.*

Хорошим инструментом для решения проблемы 1 является алгоритм Винберга (1972 год, см. [6]) построения фундаментального многогранника для гиперболической группы отражений. Практически он эффективен для арифметических групп отражений.

3.2. Более частные задачи

Проблема 4. *Компьютерная реализация алгоритма Винберга для $\mathbb{F}$-арифметических групп отражений с полем $\mathbb{F} \neq \mathbb{Q}$, например, для $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.*

Проблема 5. *Классификация устойчиво рефлективных гиперболических $\mathbb{Z}$-решеток ранга > 3.*

Проблема 6. *Классификация устойчиво рефлективных гиперболических $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-решеток ранга > 3.*

Проблема 7. *Классификация рефлективных анизотропных гиперболических $\mathbb{Z}$-решеток ранга 4 с ортогональным базисом.*

Проблема 8. *Исследование на арифметичность и квази-арифметичность многогранников Кокстера, имеющих достаточно простое комбинаторное строение (призмы, пирамиды и т.д.).*

4. Известные результаты и частичные продвижения

4.1. Проблема 1

Как было сказано выше, хороший инструмент здесь — алгоритм Винберга. Также есть серия (в том числе и недавних) работ о построении неарифметических групп отражений.

4.2. Проблема 2

Рекордный пример компактного многогранника Кокстера был найден В. О. Бугаенко при $n = 8$, хотя сама максимально возможная размерность ограничена неравенством $n \leq 29$.

Рекордный пример многогранника Кокстера конечного объёма принадлежит Р. Борчердсу в размерности $n = 21$. При этом известно, что многогранники Кокстера конечного объёма могут существовать при $n < 996$.

Оба этих примера пришли из арифметических групп отражений. Пример Бугаенко найден для некоторой арифметической группы отражений над полем $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ в пространстве $\mathbb{H}^8$, а пример Борчердса является фундаментальным многогранником для гиперболической рефлективной решётки ранга 22, то есть арифметической группы отражений над полем $\mathbb{Q}$ в пространстве $\mathbb{H}^{21}$.

4.3. Проблема 3

Что касается третьей проблемы, то она тоже далека от завершения. Эффективное описание всех дискретных групп отражений в пространствах $\mathbb{H}^n$ получено лишь при $n = 2$ (Пуанкаре, 1882) и при $n = 3$ (знаменитые теоремы Е. М. Андреева 1970 года).

В классификации арифметических групп отражений достигнуты более существенные успехи. Над полем определения $\mathbb{Q}$ максимальные арифметические группы отражений классифицированы с точностью до подобия при $n = 2, 4, 5$ и для некомпактного случая при $n = 3$.

Также получена классификация арифметических групп отражений с полем определения $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ в плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$.

Во всех остальных случаях проблема 3 остаётся до сих пор открытой.

4.4. Проблема 4

Как было сказано выше, алгоритм Винберга является эффективным способом построения фундаментальных многогранников для арифметических групп отражений.

Попытки реализовать на компьютере алгоритм Винберга предпринимались с 80-х годов прошлого века, но все они ограничивались решётками частного вида, как правило, задаваемыми диагональными квадратичными формами.

Единственной известной до недавнего времени реализацией, опубликованной вместе с подробной документацией, является программа Р. Гульельметти 2016 года[1], работающая с решётками, заданными диагональными квадратичными формами, инвариантые множители которых свободны от квадратов. Эта программа работает достаточно эффективно во всех размерностях, где существуют рефлективные решётки.

В 2017 году мы совместно с А. Ю. Перепечко написали программу алгоритма Винберга для произвольных гиперболических решёток с полем определения $\mathbb{Q}$. Программа опубликована в Интернете (см. [7]), её подробное описание доступно в статье [8]. Программа была проверена на значительном количестве известных рефлективных гиперболических решёток.

4.5. Продвижения в более частных задачах

Про проблему 4 написано чуть выше, но в общем случае программа даже для квадратичных полей пока не написана.

[1] см. https://rgugliel.github.io/AlVin

Что касается проблем 5 и 6, то здесь получена классификация устойчиво рефлективных решеток ранга 4 над $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, см. об этом мои работы [11, 12] и мою диссертацию [13].

5. Заключение

Проблемы 4–8 могут служить весьма хорошими задачами для курсовых и дипломных работ. На данной момент уже существуют хорошие идеи и разработано немало методов для их решения.

Рекомендуются к прочтению обзоры Э.Б. Винберга 1985 года (см. [9]) и М. Белолипецкого 2016 года (см. [10]). Более свежие результаты доказаны или перечислены в работах [11, 12] и в моей диссертации [13].

Список литературы

[1] Ian Agol, Mikhail Belolipetsky, Peter Storm, and Kevin Whyte. Finiteness of arithmetic hyperbolic reflection groups. — Groups Geom. Dyn., 2008, Vol. 2(4), p.

[2] H. S. M. Coxeter. Discrete groups generated by reflections, — Ann. of Math. (2), 35:3 (1934), 588–621.

[3] Э. Б. Винберг. Дискретные группы, порожденные отражениями, в пространствах Лобачевского. — Матем. сб., 1967, том 72(114), номер 3, с. 471 — 488.

[4] Э. Б. Винберг. Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности. — Труды ММО, 1984, Т. 47, с. 68 — 102.

[5] В.В. Никулин. Конечность числа арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского. — Изв. РАН. Сер. матем., 2007, Т. 71, выпуск 1, с. 55 — 60.

[6] Э. Б. Винберг. О группах единиц некоторых квадратичных форм. — Мат. сб., 1972, 87, с. 18 — 36

[7] N. Bogachev, A. Perepechko, Vinberg's Algoritm, https://github.com/aperep/vinberg-algorithm

[8] Н. В. Богачев, А. Ю. Перепечко. Алгоритм Винберга для гиперболических решёток. — Математические заметки, 2018, (в печати).

[9] Э. Б. Винберг. Гиперболические группы отражений. — УМН, 1985, 40:1, с. 29 — 66.

[10] Mikhail Belolipetsky. Arithmetic hyperbolic reflection groups. — Bulletin (New Series) of the Amer. Math. Soc., 2016, Vol. 53 (3), p. 437 — 475.

[11] Н. В. Богачев. Рефлективные анизотропные гиперболические решетки ранга 4. — УМН, 2017, том 72, выпуск 1, стр. 193—194.

[12] Н. В. Богачев. Классификация (1.2)-рефлективных анизотропных гиперболических решёток ранга 4. — Известия РАН, Серия матем., 2018 (в печати).

[13] Н. В. Богачев. Рефлективные гиперболические решетки. — Диссертация на соискание ученой степени кандидата математических наук, Высшая школа экономики, 2018. https://nvbogachev.netlify.com/project/res-probl/Bogachev-PhD-2018.pdf.