Экстремальные задачи в раскрасках гиперграфов

Данила Черкашин

3 ноября 2020

Гиперграф — это пара $H = (V, E)$, где V — множество вершин, а $E \subset 2^V$ — множество ребер. То есть, в отличие от ребра обычного графа, состоящего из двух вершин, ребро гиперграфа может иметь произвольный размер. Гиперграф называется n-однородным, если любое его ребро имеет размер n. Раскраска вершин гиперграфа в k цветов называется *правильной*, если любое ребро содержит вершины хотя бы двух цветов. *Хроматическим числом* гиперграфа называется минимальное число χ, такое что гиперграф можно покрасить в χ цветов правильным образом.

Наиболее изученной является задача о нахождении минимального количества ребер в n-однородном гиперграфе, не имеющем правильной раскраски в r цветов. Эта величина обозначается $m(n, r)$. Точные значение $m(n, r)$ известны для $n = 2$ и произвольного r, а также для $r = 2$ и $n \leq 4$. Нахождение других значений, кроме $m(3, 3)$, представляется мало реальным.

Перейдем к оценкам. Оказывается, что при различных условиях на n и r картина разнится, мы ограничимся модельными случаями $r = 2$, $n \to \infty$ и $n = 3$, $r \to \infty$. Мы обсудим как получаются следующие, наилучшие на сегодня, оценки.

Theorem 0.1 *Пусть $n > n_0$, тогда*

$$\frac{e \ln 2}{4} 2^n \geq m(n, 2) \geq 0.1 \sqrt{\frac{n}{\ln n}} 2^n.$$

Theorem 0.2 *Пусть $r > r_0$, тогда*

$$\frac{4}{3} r^3 \geq m(3, r) \geq 0.54 r^3.$$