О. Р. Мусин, МФТИ, 6 октября 2020.
Темы курсовых и докладов

Рекомендуется предварительно просмотреть лекции:
https://drive.google.com/drive/folders/1kEhlHevbiLwmb4bg62RWMZUYP31bqVg4?usp=sharing
Почта: omusin@mail.ru

Тема 1: **"Множества с s расстояниями" (Лекция 2)**

(а) Множества точек с двумя расстояниями в пространстве и на сфере.

На плоскости такое множество может состоять из пяти точек — вершин правильного пятиугольника. В трёхмерном пространстве максимальная мощность (размер) таких множеств равна шести и оказывается, что имеется шесть различных (не изометричных) конфигураций. Недавно получен значительный прогресс по максимальной мощности сферических множеств с двумя расстояниями

(б) Теория Эйнхорна-Шёнберга (ТЭШ). Классификации с помощью ТЭШ всех множеств с двумя расстояниями на плоскости и в пространстве расстояния между которыми принимают не более чем два значения.
(в) Аналог ТЭШ для сферических множеств [2].
(г) Отрытые задачи из [2]
(д) Множества с s расстояниями на плоскости и в пространстве {список литературы в [3])
(е) Проблема Борсука и множества с s расстояниями.

Список литературы:

[1] А. В. Акопян, О. Р. Мусин, “О множествах с двумя расстояниями”, *Матем. просв., сер. 3*, **17** (2013), 136–151

[2] O. R. Musin, Graphs and spherical two–distance sets, *Euro. J. Comb.,* **80** (2019), 311–325

[3] H. Nozaki, M. Shinohara. A proof of a Dodecahedron conjecture for distance sets, preprint, arXiv:2009.13111 (Сентябрь 2020)

Тема 2: **"Поризм Штейнера, теорема Декарта и их обобщения" (Лекция 3)**

Знаменитый **поризм Штейнера** утверждает, что если цепочка окружностей, каждая из которых касается двух соседних и двух данных непересекающихся окружностей замкнется, то замкнется любая такая цепочка, независимо от выбора первой окружности. **Теорема Декарта** утверждает, что для любых четырёх взаимно касающихся окружностей радиусы окружностей удовлетворяют некоторому квадратному уравнению. В [4] перечислены все случаи, когда имеет место многомерный аналог поризма Штейнера.

Обобщением теоремы Декарта для n-мерного пространства и n+2 шаров является **теорема Содди-Госсе.** Интересно и для других случаев найти аналоги теоремы Декарта.

[4] O. R. Musin, Analogs of Steiner’s porism and Soddy’s hexlet in higher dimensions via spherical codes, *Arch. Math.,* **111** (2018), 493–501

Тема 3: **"Экстремальные конфигурации точек на сфере" (Лекция 1)**

Одними из самых первых математических этюдов (etudes.ru) был этюд "Контактное число шаров и сферические коды ". В этом этюде разбирался вопрос Ньютона - Грегори (1694) о числе одинаковых бильярдных шаров, которые можно расположить в пространстве вокруг центрального шара того же радиуса? Несмотря на простую формулировку, эта задача оказалась довольно трудной и строгое доказательство того, что шаров не может быть больше 12 появилось только спустя 260 лет после постановки задачи. Обобщением этой задачи является **задача Таммеса** для сферы и тора (периодические упаковки кругов).

[5] А. В. Акопян, Г. А. Кабатянский, О. Р. Мусин, “Контактные числа, коды и сферические многочлены”, *Матем. просв., сер. 3*, **16** (2012), 57–74

[6] О. Р. Мусин, А. С. Тарасов, “Экстремальные задачи упаковок кругов на сфере и неприводимые контактные графы”, *Тр. МИАН*, **288** (2015), 133–148

[7] O. R. Musin and A. V. Nikitenko, Optimal packings of congruent circles on a square at torus, Discrete Comp. Geom., **55:1** (2016), 1-20.

Тема 4: **"Гипотеза Римана, теорема Рамануджана и сверхизбыточные числа" (Л. 4)**

Имеется довольно много эквивалентных формулировок гипотезы Римана. Среди них выделяются "элементарные" (т.е. понятные даже школьникам) формулировки, принадлежащие Г. Робину (1984) и Дж. Лагариасу (2002). Этот подход восходит к работе Рамануджана (1915) по сверхсоставным числам. В [9] рассматривается теорема Рамануджана для колоссально-составных чисел и ее обобщении на основе выпуклой оболочки функции делителей. Свойства сверхизбыточных чисел разительно отличаются в зависимости от того верна или нет гипотеза Римана. В [9] имеются открытые вопросы по этой теме, в частности задача о константе Рамануджана в решении которой может помочь численный эксперимент.

[8] J. C. Lagarias. An Elementary Problem Equivalent to the Riemann Hypothesis. *Am. Math. Monthly,* **109** (2002), 534-543.

[9] O.R. Musin, Ramanujan's theorem and highest abundant numbers, *Arnold Mathematical Journal* (AMJ), Vol **6:1** (2020); 119-13

Тема 5: **" Сбалансированные подмножества и обобщения леммы Шпернера" (Л. 5)**

[10] O. R. Musin, KKM type theorems with boundary conditions, *J. Fixed Point Theory Appl.,* **19** (2017), 2037–2049.

[11] O. R. Musin, Sperner type lemma for quadrangulations, *Mosc. J. Combinatorics and Number Theory,* **5:1** (2015), 26–35