Некоторые задачи для студентов

Александр Полянский

28 апреля 2017 г.

(1) Почти однодистанционные множества. Конечное множество точек в $\mathbb{R}^d$ будем называть *почти однодистанционным*, если среди любых трёх из них найдутся две на расстоянии 1. В статье [Pol17] ставятся следующие две задачи:

Задача 1. Предположим, что $\mathcal{V}$ — почти однодистанционное множество в $\mathbb{R}^d$. Пусть диаметр $\mathcal{V}$ равен 1. Оцените сверху мощность множества $\mathcal{V}$. Желательно доказать, что $\mathcal{V} = O(d)$.

Задача 2. Предположим, что $\mathcal{V}$ — почти однодистанционное множество в $\mathbb{R}^d$. Пусть $\mathcal{V}$ также является двухдистанционным, т.е. расстояние между любыми двумя точками из $\mathcal{V}$ равно одному из двух фиксированных чисел (одно из них, очевидно, 1). Оцените сверху мощность множества $\mathcal{V}$. Желательно доказать, что $\mathcal{V} = O(d)$.

(2) Плотные множества. В статье [Pol16, Лемма 1] доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $q > 0$ и $p \geq 0$ — некоторые целые числа. Пусть семейство $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_p\}$ состоит из непустых и собственных подмножеств $[q]$. Допустим, что для любого $I \subseteq [p]$ выполняется*

$$\bigcup_{i\in I} M_i = [q] \text{ или } \bigcup_{i\in I} M_i \neq \bigcup_{i\in I\setminus\{j\}} M_i$$

для некоторого $j \in I$. Тогда $p \leqslant 2q - 2$.

В [Bog17, Решение 3 задачи 3] было предложено совсем простое доказательство данной леммы. Предлагается подумать над следующим естественным обобщение данной задачи.

Задача 3. Пусть $q > 0$ и $p \geq 0$ — некоторые целые числа. Пусть семейство $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_p\}$ состоит из непустых и собственных подмножеств $[q]$. Допустим, что для любого $I \subseteq [p]$ выполняется

$$\left|\bigcup_{i\in I} M_i\right| \geq q - 1 \text{ или } \bigcup_{i\in I} M_i \neq \bigcup_{i\in I\setminus\{j\}} M_i$$

для некоторого $j \in I$. Получить точную оценку p в терминах q. (Нетрудно убедиться, что оценка квадратичная, но хочется получить точную оценку)

(3) Задачи о дощечках. *Зоной* ширины ω на единичной двумерной сфере будем называть множество точек, которые находятся на не более $\omega/2$ от некоторой большой окружности (экватора). В статье [JP17] доказана гипотеза Л.Ф. Тота от 1973, утверждающую, что если несколько зон покрывают сферу, то их суммарная ширина по крайней мере π. Остаются открытыми следующие вопросы.

Задача 4. *Полоской* ширины ω на единичной двумерной сфере будем называть множество точек, которые находятся на не более $\omega/2$ от некоторой окружности. Докажите, что если несколько полосок покрывают сферу, то их суммарная ширина по крайней мере π.

Задача 5. Fejes Tóth's plank problem. Выпуклая сферическая область — это такое множество на сфере, что любые две точки могут быть соединены меньшей дугой некоторой большой окружности (экватора). Верно ли, что если некоторая сферическая область ширины w покрыта несколькими зонами, то их суммарная ширина по крайней мере w?

Задача 6. Goodman-Goodman spherical problem. Пусть на сфере лежат несколько дисков радиусов $r_1, \ldots, r_n$, где $r_1 + \ldots + r_n < \pi/2$. Тогда либо существует диск радиуса $r_1 + \ldots + r_n$ покрывающий маленькие диски, либо найдётся большая окружность, которая не пересекает ни один из дисков и делит диски на две непустые части. Докажите это.

Задача 7. Bezdek's plank problem. *Дощечкой* ширины w называется множество точек, которые лежат между двумя параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии w. Пусть единичный шар за исключением (возможно) маленького шарика радиуса ε, который концентричен единичному шару, покрыт несколькими дощечками. Докажите, суммарная ширина дощечек по крайней мере 2.

(4) Неравенства на плоскости. Вот некоторые классические нерешенные задачи, связанные с покрытиями и упаковками на плоскости.

Задача 8. Докажите, что если правильный треугольник со стороной $n\sqrt{3}$ покрыт единичными кругами, то кругов по крайней мере n^2.

Задача 9. LFToth's and Micha Perles's problem. Пусть R — это 2-комплекс такой, что R — ограниченная часть треугольной решетки со стороной 1. Пусть X — некоторое множество на плоскости, что для любых $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in X$ выполняется $\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| \geqslant 1$. Чему равно наибольшее число элементов в X? Естественная гипотеза состоит в том, что $|X|$ не превосходит число вершин в R. Это известно, когда R — треугольник (с внутренностью) со стороной n

Список литературы

[Bog17] I. Bogdanov, *Romanian Masters of Mathematics* (2017).

[JP17] Z. Jiang and A. Polyanskii, *Proof of László Fejes Tóth's zone conjecture*, arXiv preprint arXiv:1703.10550 (2017).

[Pol16] A. Polyanskii, *Helly-type theorem for eigenvectors*, arXiv preprint arXiv:1611.03251 (2016).

[Pol17] A. Polyanskii, *On almost equidistant sets*, 2017. Unpublished Manuscript.