

МФТИ, ФИВТ, весна 2013.
Программа курса
Математическая логика и теория алгоритмов.
Д.В. Мусатов, А.Е. Ромащенко.

Звездочкой отмечены пункты, которые входят в программу экзамена только для специальности ПМИ.

1. Трансфинитная индукция.

- 1.1. Фундированные множества: эквивалентность трёх определений. Определение вполне упорядоченного множества.
- 1.2. Пример рассуждения по трансфинитной индукции: если A вполне упорядоченное множество и $f : A \rightarrow A$ (строго) монотонная функция, то $f(x) \geq x$ для всех x .
- 1.3. Начальные отрезки вполне упорядоченного множества. Лемма о представлении произвольного собственного начального отрезка в виде полуинтервала $[0, a)$. Лемма об объединении начальных отрезков.
- 1.4. Теорема о сравнимости любых двух вполне упорядоченных множеств.
- 1.5. Аксиома выбора. Теорема Цермело: любое множество может быть вполне упорядочено.
- 1.6. Сравнимость мощностей любой пары множеств.
- 1.7. Декартово произведение бесконечного A и счетного B равномощно A . Следствие: мощность объединения бесконечных A и B имеет мощность $\max\{|A|, |B|\}$.
- 1.8. * Лемма Цорна.
- 1.9. * Равномощность бесконечного множества A и его декартова квадрата $A \times A$.
- 1.10. * Определение базиса Гамеля, теорема о существовании.
- 1.11. * Базис Гамеля для множества вещественных чисел, рассматриваемого, как векторное пространство на поле рациональных чисел. Применения: изоморфизм $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}^2, +)$; существование функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию $f(x + y) = f(x) + f(y)$, отличной от умножением на константу.

2. Вычислимость.

- 2.1. Формальное определение алгоритма, машины Поста. Другие модели вычислимости: машины Тьюринга, машины Минского, нормальные алгорифмы Маркова. Определение вычислимой функции. Тезис Чёрча. Существование невычислимых функций.

- 2.2. Разрешимые и перечислимые множества. Эквивалентность трёх определений перечислимого множества в \mathbb{N} : существование перечисляющего алгоритма, вычислимость полухарактеристической функции, множество есть проекция некоторой разрешимого $A \subset \mathbb{N}^2$ на первую координату.
- 2.3. Замкнутость классов разрешимых и перечислимых множеств относительно объединения и пересечения. Теорема Поста о перечислимых и коперечислимых множествах.
- 2.4. Неразрешимость проблем самоприменимости и остановки.
- 2.5. Универсальные вычислимых функций. Главные универсальные вычислимые функции. Универсальная машина Поста и теорема о существовании главной универсальной вычислимой функции.
- 2.6. Теорема Райса–Успенского о неразрешимости любых нетривиальных свойств вычислимых функций.
- 2.7. Теорема Клини о неподвижной точке.
- 2.8. Понятия m -сводимости, простейшие свойства. Сводимость произвольного перечислимого множества к задачам остановки и самоприменимости; m -полнота.
- 2.9. Вычисления с оракулом. Сводимость по Тьюрингу, её простейшие свойства.
- 2.10. Классы Σ_n и Π_n , их замкнутость относительно объединения и пересечения.
- 2.11. * Множества $\mathbf{O}^{(n)}$. Теорема об арифметической иерархии (без доказательства).

3. Лямбда-исчисление.

- 3.1. Чистое λ -исчисление: термы, комбинаторы. Преобразование λ -термов: α -конверсии, β -редукции. Определение эквивалентности (равенства) λ -термов, λ -термы в нормальной форме. Формулировка теоремы Чёрча–Россера.
- 3.2. Нумералы Чёрча. Представление в λ -исчислении операции прибавления единицы, сложения, умножения.
- 3.3. Логические операции в λ -исчислении. Кодирование пары и комбинатор вычитания единицы.
- 3.4. Теорема о неподвижной точке для λ -исчисления; комбинаторы неподвижной точки.
- 3.5. Комбинатор, представляющий функцию факториал.

4. Формальная арифметика и доказуемость.

- 4.1. Лемма о представлении в языке формальной арифметике конечных последовательностей натуральных чисел.
- 4.2. Представление в формальной арифметике разрешимых и перечислимых множеств. Множество арифметично тогда и только тогда, когда оно принадлежит арифметической иерархии.
- 4.3. Понятие системы аксиом для языка первого порядка. Непротиворечивые и полные системы аксиом. Аксиомы арифметики Пеано.
- 4.4. Теорема о неразрешимости множества истинных замкнутых формул формальной арифметики. Первая теорема Гёделя о неполноте (семантическая формулировка¹).
- 4.5. * Прямое доказательство первой теоремы Гёделя о неполноте: построение истинного недоказуемого утверждения с помощью теоремы Клини о неподвижной точке.
- 4.6. Построение арифметической формулы, выражающей свойство непротиворечивости системы аксиом \mathcal{A} . Формулировка второй теоремы Гёделя о неполноте.

Основной список литературы.

1. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 1. Начала теории множеств. – М.: МЦНМО, 1999.
2. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 3. Вычислимые функции. – М.: МЦНМО, 1999.
3. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.
4. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 2002.
5. Барендрегт Х. Лямбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. М.: Мир, 1985.

Дополнительная литература.

1. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.
2. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. М.: КомКнига, 2006.
3. Клини С.К. Математическая логика. М.: Мир, 1973.

¹Синтаксическая формулировка теоремы Гёделя о неполноте в программу экзамена не входит.

4. Успенский В.А. Машина Поста. М.: Наука, 1988.
5. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. Вводный курс математической логики. М.: Физматлит, 2004.
6. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
7. Шёнфилд Дж. Математическая логика. М.: Наука, 1975.
8. Манин Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. М.: Советское радио, 1979.
9. Манин Ю.И. Вычислимое и невычислимое. М.: Советское радио, 1980.