

Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2013
Математическая индукция

1. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

- a) Если для некоторого свойства A выполнено $A(0)$, а также для любого n из $A(n)$ следует $A(n + 1)$, то для любого натурального n выполнено $A(n)$
- b) Если для любого n из $A(0), \dots, A(n - 1)$ следует $A(n)$, то для любого n выполнено $A(n)$.
- c) В любом непустом множестве натуральных чисел есть наименьшее число.
- d) Не существует бесконечной строго убывающей последовательности натуральных чисел.

2. Докажите, что при любом n квадрат размера $2^n \times 2^n$ без одной угловой клетки можно разбить на уголки из трёх клеток.

3. Докажите, что уравнение $8a^4 + 4b^4 + 2c^4 = d^4$ не имеет решений в положительных целых числах.

4. Игра “Ханойские башни” состоит из трёх штырей и n колец разного размера. За ход разрешается перенести кольцо с одного штыря на другой, при этом нельзя класть кольцо большего размера на кольцо меньшего.

- a) Докажите, что за некоторое число ходов можно перенести все кольца с одного штыря на другой.
- b) Докажите, что это можно сделать за $2^n - 1$ ход.
- c) Докажите, что меньшего числа ходов не хватит.

5. В некоторой стране каждый город соединён с любым другим дорогой с односторонним движением.

- a) Докажите, что найдётся город, из которого можно доехать в любой другой по дорогам;
- b) Докажите, что найдётся город, из которого можно доехать в любой другой по дорогам не более чем с одной пересадкой.

6. На краю пустыни имеется резервуар с неограниченным запасом бензина и неограниченное число канистр. Машина может заправлять бензобак из резервуара, сливать бензин из бензобака в канистру и оставлять эту канистру в любой точке пустыни на хранение или заправлять машину из канистры, оставленной на хранение ранее. Вozить канистры с бензином запрещается. На полном бензобаке машина может проехать 50 км. Докажите, что машина сможет проехать сколь угодно далеко.

7. Имеется шеренга из n солдат-новобранцев. По команде старшины: «Нале-ВО!» — каждый солдат поворачивается налево или направо (некоторые путают). После этого каждую секунду солдаты, стоящие лицом друг к другу, разворачиваются кругом. Докажите, что рано или поздно повороты прекратятся.

8. Купец совершил с чёртом сделку: каждый день купец меняет у чёрта денежную купюру на любое число более мелких. Получать деньги из других источников купец не может. Как только купец не сможет выполнить договор, он продаст чёрту душу. Докажите, что рано или поздно так и случится. (Имеется лишь конечное число номиналов купюр. Каждый день купцу нужно что-то тратить на еду. Купец и чёрт бессмертны.)

9. На столе лежат фишки с натуральными числами. Некто каждую минуту либо убирает со стола фишку с нулём, либо заменяет одну из фишек на любое количество фишек с меньшими числами. Докажите, что рано или поздно этот процесс закончится.

Список литературы

[1] Шень А. Математическая индукция - М.: МЦНМО, 2007