МФТИ, ФИВТ, специальность ПМФ. Весна 2014.
Программа курса

Математическая логика.

Д.В. Мусатов, А.Е. Ромащенко.

1. **Трансфинитная индукция.**

   1.1. Фундированные множества: эквивалентность трёх определений. Определение вполне упорядоченного множества.

   1.2. Метод трансфинитной индукции, примеры его применения.

   1.3. Начальные отрезки вполне упорядоченного множества. Представление произвольного собственного начального отрезка в виде полуинтервала $[0, a)$.

   1.4. Теорема о сравнимости любых двух вполне упорядоченных множеств.

   1.5. Ординалы, определения и основные свойства.

   1.6. Всякое вполне упорядоченное множество изоморфно некоторому ординалу.

   1.7. Теорема о существовании ординалов сколь угодно большой мощности.

   1.8. Парадокс Бурали-Форти: не существует множества всех ординалов.

   1.9. Аксиома выбора. Теорема Цермело: любое множество может быть вполне упорядочено.

   1.10. Сравнимость мощностей любой пары множеств.

   1.11. Лемма Цорна.

   1.12. Декартово произведение бесконечного A и счетного B равномощно A. Следствие: мощность объединения бесконечных A и B имеет мощность $\max\{|A|, |B|\}$.

   1.13. Равномощность бесконечного множества A и его декартова квадрата $A \times A$.

2. **Вычислимость.**

   2.1. Формальное определение алгоритма, машины Поста. Тезис Чёрча.

   2.2. Определение вычислимой функции. Существование невычислимых функций.

   2.3. Разрешимые и перечислимые множества.

- 2.4. Замкнутость классов разрешимых и перечислимых множеств относительно объединения и пересечения. Теорема Поста о перечислимых и коперечислимых множествах.
- 2.5. Неразрешимость проблем самоприменимости и остановки.
- 2.6. Универсальные вычислимых функций. Главные универсальные вычислимые функции. Универсальная машина Поста и теорема о существовании главной универсальной вычислимой функции.
- 2.7. Теорема Райса–Успенского о неразрешимости любых нетривиальных свойств вычислимых функций.
- 2.8. Теорема Клини о неподвижной точке.
- 2.9. Понятия m-сводимости, простейшие свойства. Сводимость произвольного перечислимого множества к задачам оставновки и самоприменимости; m-полнота.
- 2.10. Вычисления с оракулом. Сводимость по Тьюрингу, её простейшие свойства.
- 2.11. Классы Σ_n и Π_n, их замкнутость относительно объединения и пересечения.
- 2.12. Множества $\mathbf{0}^{(n)}$. Теорема об арифметической иерархии.

3. **Лямбда-исчисление.**

- 3.1. Чистое λ-исчисление: термы, комбинаторы. Преобразование λ-термов: α-конверсии, β-редукции. Определение эквивалентности (равенства) λ-термов, λ-термы в нормальной форме. Формулировка теоремы Чёрча–Россера.
- 3.2. Нумералы Чёрча. Представление в λ-исчислении операции прибавления единицы, сложения, умножения.
- 3.3. Логические операции в λ-исчислении. Кодирование пары и комбинатор вычитания единицы.
- 3.4. Теорема о неподвижной точке для λ-исчисления; комбинаторы неподвижной точки.
- 3.5. Комбинатор, представляющий функцию факториал.

4. **Формальная арифметика и доказуемость.**

   4.1. Теории и модели. Теорема Гёделя о полноте.

   4.2. Понятие системы аксиом для языка первого порядка. Непротиворечивые и полные системы аксиом. Аксиомы арифметики Пеано.

   4.3. Лемма о представление в формальной арифметике разрешимых и перечислимых множеств.

   4.4. Теорема о неразрешимости множества истинных замкнутых формул формальной арифметики. Первая теорема Гёделя о неполноте.

   4.5. Арифметическая формула $\mathrm{Consis}_{\mathcal{A}}$, выражающей свойство непротиворечивости системы аксиом $\mathcal{A}$. Формулировка второй теоремы Гёделя о неполноте.

Основной список литературы.

1. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 1. Начала теории множеств. – М.: МЦНМО, 1999.

2. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 3. Вычислимые функции. – М.: МЦНМО, 1999.

3. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.

4. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 2002.

5. Барендрегт Х. Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. М.: Мир, 1985.

Дополнительная литература.

1. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.

2. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. М.: КомКнига, 2006.

3. Клини С.К. Математическая логика. М.: Мир, 1973.

4. Успенский В.А. Машина Поста. М.: Наука, 1988.

5. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. Вводный курс математической логики. М.: Физматлит, 2004.

6. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.

7. Шёнфилд Дж. Математическая логика. М.: Наука, 1975.

8. Манин Ю.И. Доказемое и недоказуемое. М.: Советское радио, 1979.

9. Манин Ю.И. Вычислимое и невычислимое. М.: Советское радио, 1980.