1 Лекция 13

1.1 Перколяция на решетке Бете

Рассмотрим задачу о перколяционном переходе для простейшего графа, в котором с каждой вершиной связано ровно z ребер (решетка Бете). Пусть некоторая доля узлов (ребер) изъята из графа. Точка перколяционного перехода - это критическая доля вырезанных узлов (ребер) такая, что при превышении порогового значения связность графа в целом ("возможность протекания"по нему) разрушается. Соответствующие явления называются перколяцией узлов и ребер соответственно.

1.1.1 Перколяция узлов

Предположим для определенности, что вероятность того, что узел активен, равна p. Очевидно, что доля активных узлов в графе также равна p. Вероятность дезактивации узла равна, очевидно, $1-p$.

Исследуем вероятность $P(p)$ того, заданный узел принадлежит к связной компоненте кластера. Оказывается более удобным рассматривать вместо $P(p)$ вероятность $Q(p) = 1-P(p)$ того, что заданный узел *не принадлежит* связной компоненте графа. В самом деле, $Q(p)$ удовлетворяет очевидному уравнению

$$Q(p) \; = \; 1 - p + p\,[Q(p)]^z \tag{1}$$

Смысл уравнения (1) очевиден: вероятность того, что узел не принадлежит связному кластеру, равна сумме вероятности того, что сам узел неактивен и вероятности того, что при активном (принадлежащем связному кластеру) рассматриваемом узле все z его ближайших соседей *не принадлежат* связному кластеру. Из уравнения (1) следует, что

$$[1-P(p)]^z\,p + P(p) - p \; = \; 0 \tag{2}$$

При $p = 1$ имеем $P(1) = 1$, как и должно быть.

Рассмотрим простейший случай $z = 2$. Из (2) получаем:

$$P(p)\,[pP(p) + 1 - 2p] \; = \; 0 \tag{3}$$

Из (4) получаем, с учетом того, что $P(p) \geq 0$:

$$P(p) \; = \; \begin{cases} 0, & 0 \leq p < 1/2 \\ 2 - 1/p, & 1/2 < p < 1 \end{cases} \tag{4}$$

Из формулы (4) следует, что при $p < 1/2$ вероятность принадлежать "проводящему" кластеру равна нулю, т.е. связного гигантского кластера не существует и, тем самым, перколяция принадлежит к разряду явлений, появляющихся при достижении ключевыми параметрами задачи своих критических значений, в данном случае - значения $p = p_c = 1/2$.

Построим приближенное решение уравнения (4) при произвольном z. Предположим (и ниже проверим по полученному ответу), что $P(p \simeq p_c) \ll 1$, так что вблизи $p = p_c$

$$(1 - P(p))^z \simeq 1 - zP + \frac{z(z-1)}{2}P^2 + \cdots, \tag{5}$$

так что

$$P(p) = 0, \qquad p < \frac{1}{z} \tag{6}$$

$$P(p) = \frac{2}{p}\frac{(p-1/z)}{z-1}, \quad p \geq \frac{1}{z} \tag{7}$$

т.е.

1. Перколяционный переход происходит в точке

$$p_c = 1/z \tag{8}$$

2. В окрестности точки перехода $p \gtrsim p_c$

$$P(p)|_{p \gtrsim p_c} \simeq 2\frac{z}{z-1}\left(p - \frac{1}{z}\right) \tag{9}$$

Отметим, что при $z = 1$ имеем $P(p) = 0$, т.е. в линейной цепочке перколяционного перехода нет.

1.1.2 Перколяция ребер

Рассмотрим теперь задачу, в которой активными (с вероятностью p) или неактивными являются не узлы графа, а его ребра. В этом случае вероятность того, что все каналы коммуникации для данного узла где-то прервутся, равна

$$[1 - p + pQ(p)]^z \tag{10}$$

т.е.

$$Q(p) = [1 - p + pQ(p)]^z \tag{11}$$

или

$$1 - P(p) = [1 - pP(p)]^z \tag{12}$$

В окрестности критической точки $p \simeq p_c$ имеем (в предположении $P(p \simeq p_c) \ll 1$)

$$P(p)|_{p \gtrsim p_c} \simeq \frac{2}{p^2}\frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{z}\right) \simeq 2z\frac{z}{z-1}\left(p - \frac{1}{z}\right) \tag{13}$$

Замечательный (и несколько загадочный) факт состоит в том, что хотя критическая точка для перколяционного перехода $p_c = 1/z$ одинакова для обоих случаев но, как следует из сравнения (9) и (13), вероятность принадлежности к критическому кластеру при заданных p, z выше для перколяции ребер, чем для перколяции узлов.

1.2 Производящая функция

Ключевым инструментом для рассмотрения задач, связанных со сложными сетями, характеризующимися распределением по числу ребер в узле $\{p_k\}$, является производящая функция

$$G_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \tag{14}$$

такая, что

$$G_0(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \ = \ 1 \tag{15}$$

Производящая функция $G_0(x)$ позволяет написать компактную формулу для моментов распределения $\{p_k\}$:

$$\langle k^n \rangle = \sum k^n p_k = \left[\left(x \frac{d}{dx} \right)^n G_0(x) \right]_{x=1} \tag{16}$$

В самом деле,

$$G_0(x) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} p_k \mathrm{e}^{k \ln x} \tag{17}$$

так что

$$\langle k^n \rangle \ = \ \left. \frac{dG_0}{d(\ln x)^n} \right|_{x=1} \ = \ \left[\left(x \frac{d}{dx} \right)^n G_0(x) \right]_{x=1} \tag{18}$$