ЗАДАЧИ ДЛЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

1. ПРИМЕР КОЛЬЦА БЕЗ ОТА). Проведите анализ кольца $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ целых чисел, пополненных корнем из -5, лежащим в верхней полуплоскости (то есть, минимального кольца, содержащего $\sqrt{-5}$ и все целые числа). Покажите, что

   (a) это кольцо состоит из всех комплексных чисел, представимых в форме $a+b\sqrt{-5}$ и только их (где $a, b \in \mathbf{Z}$);

   (b) функция $N : \mathbf{Z}[\sqrt{-5}] \to \mathbf{N}$, заданная формулой $N(a+b\sqrt{-5}) = (a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5}) = a^2+5b^2$, переводит произведение в произведение. (Она называется *нормой* кольца; $N(a) = a^2$ для обычных целых чисел, рассматриваемых как элементы кольца $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$.);

   (c) найти все обратимые элементы в нашем кольце;

   (d) числа $3, 7, 4 \pm \sqrt{-5}, 1 \pm 2\sqrt{-5}$ все простые;

   (e) На основании всего вышеперечисленного указать явное противоречие Основной Теореме Арифметики в $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$.

2. Анализ наибольших общих делителей. Ниже под $< n, K, m >$ понимается наибольший общий делитель пары элементов кольца K; если кольцо в обозначении не указано, то обычно ясно, о чём идёт речь. Для обычных целых чисел, лежащих во всех наших кольцах, неуказание кольца означает, что $K = \mathbf{Z}$.

   (a) При каких условиях $< an+bm, cn+dm >=< n, m >$ для всех $n, m \in \mathbf{Z}$?

   (b) Докажите, что если m, n — два взаимно простых целых числа разной чётности, то числа m^2-n^2 и $2mn$ тоже взаимно простые. Также взаимно простыми будут числа m^2-n^2 и m^2+n^2.

   (c) При каких условиях $< f(n, m), g(n, m) >=< n, m >$ для всех $n, m \in \mathbf{Z}$, где f и g — два многочлена от двух переменных с целыми коэффициентами (мне ответ неизвестен; возможно, он очень сложный)?

   (d) Докажите, что если обычное целое число n делится на целое число m в кольце Гауссовых чисел, то n делится на m и в обычном смысле.

   (e) Докажите, что $< a, \mathbf{Z}, b >=< a, \mathbf{Z}[\mathbf{i}], b >$ для двух обычных целых чисел (т.е. не меняется при пересчёте его же, но в кольце Гауссовых чисел).

3. Найдите обратимые элементы в кольце $\mathbf{Z}[i]$. Какую группу они образуют (по умножению)? Докажите, что любой обратимый элемент в кольце Гауссовых чисел является кубом некоторого Гауссова числа.

4. Разделите в кольце Гауссовых чисел $5+4i$ на $1-2i$ с остатком. Сколькими способами можно это осуществить? Решите ещё примеры: 13 на $5-i$, $2+i$ на $2-i$.

5. Рассмотрим кольцо $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ целых чисел, пополненных корнем из -3, лежащим в верхней полуплоскости (то есть, минимального кольца, содержащего $\sqrt{-3}$ и все целые числа). Покажите, что в нём число 2, а также числа $1 \pm \sqrt{-3}$ простые, и что $2 \cdot 2 = (1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$. Докажите, что кольцо $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ содержится в кольце $\mathbf{Z}[\omega]$ чисел Эйзенштейна. Почему приведённое выше равенство не противоречит ОТА в кольце Эйзенштейна?

6. Найдите какую-нибудь Пифагорову тройку (x, y, z) (то есть такую, что $x^2 + y^2 = z^2$ и $xyz \neq 0$) с соседними числами x, y, кроме стандартной $(3, 4, 5)$. Попробуйте придумать общее правило, и докажите его.

7. Пускай простое (натуральное) число p имеет вид $p = qr + 1$. Тогда число a является q-й степенью по модулю p в том и только том случае, когда по модулю p верно $a^r = 1$.

8. Рассмотрим уравнение $x^a + y^a = z^b$, где a и b взаимно простые. Покажите, что у такого уравнения всегда есть бесконечное множество решений, и выведите формулу, дающую целое семейство его решений.

9. Разлагая сумму квадратов в кольце Гауссовых чисел на множители, получите полное решение диофантова уравнения $y^2 = x^3 - 1$. (Эту задачку мы, кажется, уже разобрали на лекциях.)

10. Построения циркулем и линейкой.

    (a) Постройте правильный пятиугольник с помощью циркуля и линейки.

    (b) Постройте правильный 15-угольник с помощью циркуля и линейки (указание: воспользуйтесь предыдущей задачей!).

    (c) Вам дан единичный отрезок. Требуется построить с помощью циркуля и линейки отрезок длины x, удовлетворяющей уравнению
    $$x^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

где числа b, c, d — целые. Докажите, что это возможно в том и только том случае, когда это уравнение имеет хотя бы один целый корень.

(d) На основании предыдущей задачи докажите, что правильный семиугольник не может быть построен с помощью циркуля и линейки.

(e) Докажите, что правильный 9-угольник и вообще p^2-угольник, где p — простое число, построить с помощью циркуля и линейки невозможно.

(f) Охарактеризуйте все правильные n-угольники, которые можно построить с помощью циркуля и линейки.

(g) Какое максимальное число решений может быть у задачи Аполлония о проведении окружности, касающейся данных трёх не пересекающихся окружностей на плоскости?

11. Про число π.

(a) Найдите предел выражения

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

при количестве радикалов, стремящемся к бесконечности.

(b) Продолжение. С какой скоростью это выражение стремится к своему пределу? (Подсказка: при чём здесь число π?)

12. Пускай $p = 2^r + 1$ — простое число (такие числа называются простыми числами Ферма). Докажите, что тогда r само также является степенью двойки.

13. Линейные задачи.

(a) Проведите исчерпывающий анализ всех целых решений линейных уравнений с несколькими переменными, то есть уравнений вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

где коэффициенты $a_1, \ldots, a_n, b$ — произвольные целые числа.

(b) Опишите множество значений многочлена $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$, когда переменные $(x_1, \ldots, x_n)$ пробегают все комбинации целых чисел.