

## ПРИМЕРНАЯ ПРОГРАММА КУРСА

**Лекции 1-2.** Формулы индусов: три доказательства. Развитие идей каждого из доказательств: Гауссовы числа, Великая (последняя) теорема Ферма, метод секущих и касательных (нахождение рациональных точек кривых на плоскости). Решение диофантова уравнения  $y^2 = x^3 - 1$  с помощью гауссовых чисел.

Классические задачи древности. Построение с помощью циркуля и линейки правильного многоугольника, трисекция угла, квадратура круга и удвоение куба, полное их решение в начале 19 века. Разрешимость уравнений в радикалах и её исчерпывающее разрешение Эваристом Галуа. Великие "гробы": совершенные числа, простые близнецы и проблема Гольдбаха - Виноградова и другие.

**Лекции 3-4.** Великая теорема Ферма. История загадки, простейшие наблюдения. Сведение к простому нечётному показателю и случаю  $n = 4$ . Решение при  $n = 4$ . Описание чисел Эйзенштейна, делимости в них, обратимых элементов и нормы. Евклидовость кольца чисел Эйзенштейна. Разложение левой части на линейные множители. Окончание доказательства теоремы Ферма при  $n = 3$ .

**Лекции 5-6.** Квадратичный мир: уравнение Пелля и несколько его мотиваций. Кольца присоединения корней из положительных чисел, обратимые элементы в них. Гиперболические повороты. Цепные дроби, техника *вытягивания носов* и подходящие дроби, связь с группой  $GL_2[\mathbf{Z}]$ .

Лемма Минковского и существование решения уравнения  $y^2 - dx^2 = 1$  при любом  $d$ , свободном от квадратов. Завершение анализа. Задача Эрдёша о равных расстояниях. Теорема Лагранжа о квадратичных рациональностях. Решения уравнения Пелля как периодические отсечки от цепной дроби.

**Лекции 7-8.** Ещё раз о классических задачах древности. Задачи на построение циркулем и линейкой: поле "всех построимых чисел", его квадратичная натура. Расширения полей, простейшие следствия из линейной алгебры. Задача Гаусса о 17-угольнике. Невозможность трисекции угла, квадратуры круга (по модулю утверждения о трансцендентности числа  $\pi$ ) и удвоения куба. Многогранники, которые можно построить циркулем и линейкой (полное описание).

**Лекции 9-10.** Развитие метода секущих и касательных для кривых третьего порядка. Операция сложения точек. Группа рациональных точек и её свойства (теорема Морделла без доказательства). Вычисление группы рациональных точек на кривой  $y^2 = x^3 + 1$ , уравнение  $y^2 = x^3 + z^6$  и его решения.