

Программа курса „Математическая статистика“

лектор — доц. И.В. Родионов

Весна 2016

1. Вероятностно–статистическая модель. Понятия наблюдения и выборки. Моделирование выборки из неизвестного распределения. Параметрическая статистическая модель.
2. Различные виды сходимостей случайных векторов: с вероятностью 1, по вероятности, по распределению. Законы больших чисел для сходимостей случайных векторов. Многомерная центральная предельная теорема (б/д). Теорема о наследовании сходимости.
3. Лемма Слуцкого. Теорема непрерывности (пример применения леммы Слуцкого).
4. Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения. Обоснованность основной задачи математической статистики и теорема Гливленко–Кантелли. Теорема Колмогорова (б/д).
5. Статистики и оценки. Примеры статистик: выборочные характеристики, порядковые статистики. Основные свойства оценок: несмещенность, состоятельность, сильная состоятельность, асимптотическая нормальность. Примеры.
6. Наследование состоятельности и сильной состоятельности при взятии непрерывной функции. Лемма о наследовании асимптотической нормальности. Выборочные квантили. Асимптотическая нормальность выборочной квантили и выборочной медианы (б/д). Примеры.
7. Метод моментов, состоятельность и асимптотическая нормальность (б/д) оценки метода моментов.
8. Сравнение оценок, функция потерь и функция риска. Подходы к сравнению оценок: равномерный, байесовский, минимаксный, асимптотический. Допустимые оценки. Примеры.
9. Считающая мера. Понятие плотности в дискретном случае. Корректность определения.
10. Неравенство Рао–Крамера и эффективные оценки. Критерий эффективности оценки. Многомерное неравенство Рао–Крамера (б/д).

11. Экспоненциальные семейства распределений. Существование эффективных оценок для экспоненциальных семейств.
12. Метод максимального правдоподобия. Экстремальное свойство функции правдоподобия. Состоятельность оценки максимального правдоподобия.
13. Асимптотическая нормальность оценки максимального правдоподобия в регулярном случае для одномерного параметра (б/д). Теорема Бахадура (б/д). Эффективность оценки максимального правдоподобия.
14. Условное математическое ожидание случайной величины относительно σ -алгебры. Теорема Радона–Никодима (б/д) и обоснование существования условного математического ожидания. Явный вид условного математического ожидания в случае, если σ -алгебра порождена счетным разбиением.
15. Основные свойства условного математического ожидания. Теорема о наилучшем квадратичном прогнозе.
16. Условные распределения и условные плотности. Достаточное условие существования условной плотности. Вычисление условного математического ожидания с помощью условной плотности.
17. Достаточные статистики и достаточные разбиения. Критерий факторизации Неймана–Фишера (док-во для дискретного и абсолютно непрерывного случаев). Примеры. Теорема Колмогорова–Блекуэлла–Рао об улучшении несмещенных оценок.
18. Полные достаточные статистики. Теорема Лемана–Шефаре об оптимальной оценке. Теорема о полной достаточной статистике в экспоненциальном семействе (б/д). Примеры.
19. Доверительные интервалы. Метод центральной статистики. Асимптотические доверительные интервалы. Построение асимптотических доверительных интервалов с помощью асимптотически нормальных оценок. Примеры.
20. Байесовские оценки, их оптимальность в байесовском подходе к сравнению оценок. Сопряженное распределение. Неинформативные априорные распределения.
21. Линейная регрессионная модель. Оценка наименьших квадратов, ее основные свойства. Теорема о наилучшей оценке в классе линейных оценок (б/д). Несмещенная оценка для дисперсии ошибки измерений σ^2 .
22. Гауссовская линейная модель. Достаточные статистики в гауссовской линейной модели. Наилучшие несмещенные оценки параметров в гауссовской линейной модели, их распределения.
23. Распределения хи-квадрат, Стьюдента и Фишера, их свойства. Теорема об ортогональных разложениях гауссовского вектора (б/д). Доверительные интервалы для параметров гауссовской линейной модели.

24. Проверка статистических гипотез: общие принципы и основные понятия (критическое множество, уровень значимости, альтернативы, ошибки первого и второго родов, функция мощности). Сравнения критериев: наиболее мощные и равномерно наиболее мощные критерии. Несмещенность и состоятельность статистического критерия.
25. Лемма Неймана–Пирсона. Построение с ее помощью наиболее мощных критериев. Примеры. Теорема о монотонном отношении правдоподобия (б/д). Построение равномерно наиболее мощных критериев для односторонних альтернатив.
26. F -критерий для проверки линейных гипотез в гауссовской линейной модели. Пример с двумя гауссовскими выборками, отличающимися сдвигом: проверка гипотезы об их однородности.
27. Критерий согласия Пирсона для проверки простой гипотезы в схеме испытаний Бернулли с $m \geq 2$ исходами, его состоятельность. Теорема Пирсона. Расширение области применения критерия Пирсона.
28. Критерий ранговых сумм Уилкоксона. Статистика Манна-Уитни. Построение доверительного интервала для параметра сдвига θ . Сильная состоятельность медианы Ходжеса-Лемана.
29. Коэффициенты корреляции Пирсона, Спирмэна, Кендалла и обобщенный коэффициент корреляции. Их свойства.
30. Критерий согласия Колмогорова. Критерий Смирнова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А. Математическая статистика. — 3-е изд. — М.: Физматлит, 2007.
2. Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. — 2-е изд. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
3. Тюрин Ю. Н. Математическая статистика. Записки лекций. — М.: изд-во ЦПИ механико-математического факультета МГУ, 2003.
4. Ширяев А. Н. Вероятность. В 2-х кн. — 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2004.
5. Лагутин М. Б. Наглядная математическая статистика. — 2-е изд. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.