

Вопросы к экзамену по курсу “Случайные графы”

лекторы — М.Е. Жуковский, Д.А. Шабанов

весенний семестр 2016

1. Пороговые вероятности и пороговые функции обладания монотонными свойствами случайным подмножеством. Критерий того, что данная функция является пороговой вероятностью для монотонного свойства Q . Теорема о существовании пороговой вероятности для произвольного монотонного свойства случайных подмножеств. Определение точной пороговой вероятности для монотонного свойства, примеры.
2. Малые подграфы в случайном графе $G(n, p)$. Функция $m(G)$, сбалансированные и строго сбалансированные графы, примеры. Леммы о среднем количестве и дисперсии числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному графу G . Теорема о пороговой вероятности появления подграфа случайного графа $G(n, p)$, изоморфного данному фиксированному графу G .
3. Метод моментов. Достаточное условие того, что случайная величина однозначно определяется своими моментами. Многомерный метод моментов. Пуассоновская предельная теорема для числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному строго сбалансированному графу G . Многомерное обобщение пуассоновской предельной теоремы (б/д).
4. Метод моментов. Центральная предельная теорема для числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному графу G .
5. Неравенство Чернова. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = c \in (0, 1)$: теорема о максимальном размере компоненты связности. Сложные и унициклические компоненты в таком графе — предельные теоремы для числа таких компонент. Общее число вершин в унициклических компонентах.
6. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = c > 1$. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона. Уравнение для нахождения вероятности вырождения. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса (б/д). Теорема о размере максимальной связной компоненты случайного графа. Центральная предельная теорема для размера максимальной связной компоненты (б/д).
7. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = 1 + \lambda n^{-1/3}$. Лемма о среднем значении числа l -компонент на k вершинах. Лемма о среднем количестве общего числа вершин в древесных и унициклических компонентах. Максимальный размер унициклических и сложных компонент. Асимптотический порядок размера максимальной древесной компоненты случайного графа.
8. Свойства первого порядка в случайных графах. Законы нуля или единицы при $\min\{p, 1-p\}n^\alpha \rightarrow \infty$. Критерий справедливости закона нуля или единицы.

9. Законы нуля или единицы в случайном графе при $p = n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Расширения в случайных графах.
10. Распределение степеней вершин в случайном графе. Пуассоновская предельная теорема для числа вершин степени k в случайном графе $G(n, p)$. Аналогичные теоремы для числа вершин степени не менее (не более) k . Теоремы о предельной концентрации максимальной и минимальной степеней вершин в случайной графе $G(n, p)$.
11. Связность случайного графа $G(n, p)$. Теорема о предельной вероятности связности $G(n, p)$ при условии $p = (\ln n + c + o(1))/n$. Теорема о точной пороговой вероятности свойства связности $G(n, p)$. Следствия из этой теоремы: точная пороговая вероятность для свойства отсутствия изолированных вершин, пороговая функция для связности случайного графа $G(n, m)$. Лемма о одновременном наступлении связности и отсутствия изолированных вершин в графовом случайном процессе $(\tilde{G}(m), m = 0, \dots, \binom{n}{2})$.
12. Совершенные паросочетания в случайном графе. Точная пороговая вероятность появления в случайном графе $G(n, p)$ совершенного паросочетания.
13. Пути и маршруты в графах. Теорема о длине максимального пути в случайном графе $G(n, p)$. Понятие случайного двухцветного мультиграфа $G(n, r, r)$, алгоритм поиска пути в цветном мультиграфе, его формальное описание.
14. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Трансформации путей и лемма Поша. Три леммы о наличии свойства $|U \cup \Gamma(U)| \geq 3|U|$ для малых подмножеств U в случайном графе $G(n, p)$. Теорема о предельной гамильтоновости случайного графа $G(n, p)$ при условии $p = (\ln n + \ln \ln n + \omega(n))/n$, где $\omega(n) \rightarrow +\infty$.
15. Неравенства концентрации в теории вероятностей. ФКГ–неравенство в простейшем случае. Неравенство Янсона, следствия из него. Неравенство Азумы–Хеффдинга для мартингалов с ограниченными мартингальными разностями. Мартингалы реберного и вершинного типов в случайных графах.
16. Независимые множества в случайном графе. Число независимости $\alpha(G(n, p))$ и его асимптотическое поведение при $p = \text{const}$. Поведение числа независимости в динамической модели случайного графа $G(\mathbb{N}, p)$.
17. Раскрашиваемость случайного графа. Оценка вероятности отсутствия множества независимости большого размера в случайного графа $G(n, p)$ с помощью неравенства Янсона. Теорема об асимптотическом поведении хроматического числа $\chi(G(n, p))$ для случая $p = \text{const}$. Теорема Лучака об оценках хроматического числа случайного графа $G(n, p)$ в общем случае (б/д).
18. Раскрашиваемость разреженного случайного графа. Теорема о концентрации в двух значениях хроматического числа случайного графа $G(n, p)$ при $p \leq n^{-6/7}$. Теорема Ахлиоптаса – Наора о явном виде значений концентрации в случае $p = c/n$, $c > 1$ (б/д).
19. Независимые множества $G(n, p)$ в случае $p = c/n$. Метод интерполяции и закон больших чисел для $\alpha(G(n, p))$.
20. Случайные подграфы неполных графов. Теорема о фазовом переходе в случайном подграфе (n, d, λ) -графа.